

COLUMNAS LIQUIDAS EN
CONDICIONES DE INGRAVIDEZ

1979

Informe Final

Volumen I

Madrid, Diciembre 1979

COLUMNAS LIQUIDAS EN
CONDICIONES DE INGRAVIDEZ

1979

Informe Final

Volumen II

Madrid, Diciembre 1979

EXPEDIENTE nº 3/79

COLUMNAS LIQUIDAS EN CONDICIONES DE INGRAVIDEZ - 1979

Convenio de Investigación entre la Comisión Nacional de Investigación del Espacio (CONIE) y la Universidad Politécnica de Madrid (UPM), desarrollado por el Laboratorio de Aerodinámica y Mecánica de Fluidos (LAMF) de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos (ETSIA) durante el año 1979.

Responsable del trabajo ... I. Da-Riva de la Cavada

Colaboradores I. Martínez Herranz
J. Meseguer Ruiz
A. Sanz Andrés

MEMORIA

Durante este año de 1979 se ha continuado en este Laboratorio con las investigaciones teóricas y experimentales en torno al comportamiento de las zonas líquidas en condiciones de gravedad reducida.

Cuanto más se profundiza en el estudio, más amplio y variado aparece el problema y más claras sus interrelaciones con otras configuraciones de interés aparentemente ajenas. Así, aunque pudiera parecer a primera vista que el diseño y puesta a punto de un medidor de tensión superficial se sale un poco de un programa de investigaciones sobre el comportamiento de las zonas líquidas flotantes, se ha dedicado un esfuerzo considerable a este fin, por estimarse que la medición in situ, no intrusiva, de las propiedades del líquido de trabajo es de la mayor importancia, sobre todo en relación a sus futuras aplicaciones.

Nuestra participación en certámenes internacionales quedó patente en el 3^{er} Symposium Europeo de Ciencia de los Materiales en el Espacio, celebrado en Grenoble del 24 al 27 de Abril, donde presentamos el trabajo "Floating Zone Stability" por I. Da Riva e I. Martínez, publicado en "Materials Science in Space", ESA SP-142.

En Mayo tomamos parte en la reunión de investigadores, astronautas y constructores del Módulo de Física de Fluidos, celebrada en Turín del 9 al 11 de ese mes, con motivo del entrenamiento del personal con el recientemente terminado Modelo de Ingeniería de dicho aparato.

En otro orden de actividades, desearíamos resaltar

las fructíferas relaciones mantenidas con el Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial, que ha facilitado equipo especial para cinematografía a alta velocidad usado para la filmación (a 5000 imágenes por segundo) de la salida de chorros sublimétricos, lo cual sería imposible fuera del ámbito de esta valiosa colaboración.

Por último, mencionaremos el gran impulso que han recibido los estudios de simulación analítica y numérica del comportamiento de zonas flotantes, y presentación gráfica de resultados en pantalla, al disponer, por fin, de los nuevos equipos de cómputo de gráficos.

PREVISIONES

Las numerosas aplicaciones de la zona flotante, entre las que cabe citar la formación de cristales ultrapuros de grandes dimensiones de materiales semiconductores de utilización en la industria electrónica de vanguardia, así como la contribución que su estudio aporta a tan importante área de la física como es la de los fenómenos de superficie, aseguran un futuro prometedor a estos trabajos y justifican sobradamente el esfuerzo dedicado.

Siguiendo la línea de contactos científicos internacionales que tantos beneficios aporta a una investigación cooperativa como es ésta, nos hemos propuesto, con la ayuda de la Universidad Politécnica de Madrid y de la Comisión Nacional de Investigación del Espacio, organizar una reunión en Madrid los días 27 y 28 de Marzo de 1980.

Esta reunión tiene por objeto la revisión del estado actual del equipo y los experimentos, el estudio de las perspectivas futuras y el intercambio de conocimientos entre los científicos y técnicos participantes, para lo cual se organizarán conferencias y coloquios de mañana y tarde durante los dos días que dure la reunión, así como sesiones de demostración práctica en este Laboratorio. En particular, se tratarán los temas siguientes:

- Revisión y actualización del contenido científico de los experimentos a realizar en la Primera Misión del Spacelab, a la luz del trabajo en tierra llevado a cabo hasta la fecha y las disponibilidades reales en tiempo, potencia, masa y ca-

racterísticas del equipo.

- Análisis del estado actual y la evolución futura del Módulo de Física de Fluidos, incluyendo los ensayos de aceptación y de simulación de actuaciones.
- Estudio de las nuevas propuestas europeas de investigación y del desarrollo futuro del programa de cooperación.
- Entrenamiento de los astronautas operadores de vuelo en las particularidades del experimento español.

El programa de trabajo para 1980 continúa, por una parte, con la extensión de las investigaciones a nuevas áreas de estudio y, por otra, con la ampliación de áreas ya tratadas anteriormente, según se resume en los puntos siguientes:

- Estudio de la etapa de inyección para la formación de la zona líquida flotante: influencia del mojado.
- Efectos de segundo orden en la región del borde de una zona cilíndrica puesta bruscamente en rotación.
- Perturbaciones debidas al chorro de llenado de la zona: disipación de la cantidad de movimiento.
- Ensayos de referencia en tierra utilizando el Módulo de Física de Fluidos: inyección, visualización de contorno y trazadores.

Es de señalar que el programa incluye la experimentación con zonas microscópicas (como única forma de minimi-

zar los efectos gravitatorios en ensayos dinámicos), lo que supone un considerable esfuerzo de puesta a punto de las instalaciones de precisión requeridas.

INDICE

	Página
<u>VOLUMEN I</u>	
1. ESTABILIDAD DE LAS ZONAS CILINDRICAS CON BORDES LIBRES	1
1.1. INTRODUCCION	2
1.2. PLANTEAMIENTO MATEMATICO	3
1.3. PERTURBACIONES AXILSIMETRICAS	6
1.4. CONCLUSIONES	8
Referencias	9
2. MEDIDA DE LA TENSION SUPERFICIAL DE LIQUIDOS POR EL METODO DE LAS ONDAS CAPILARES	10
Lista de Símbolos	11
2.1. INTRODUCCION	14
2.2. MODELO MATEMATICO	15
2.3. VISUALIZACION DE LAS ONDAS	23
2.4. INSTALACION Y METODO DE TRABAJO	42
2.5. ANALISIS DE LOS RESULTADOS	46
2.6. CONCLUSIONES	58
Referencias	62
3. PROGRAMAS DE SIMULACION	64
3.1. INTRODUCCION	65
3.2. INTEGRACION PASO A PASO DE LAS INTEGRALES ELIPTICAS	66
3.3. DESARROLLO EN SERIE DE LAS INTEGRALES ELIPTICAS	69
3.4. CALCULO DE LAS INTEGRALES ELIPTICAS MEDIANTE LA TRANSFORMACION DE LANDEN	73
3.5. COMPARACION DE LOS DIVERSOS SUBPROGRAMAS DE CALCULO DE LAS INTEGRALES ELIPTICAS	86
Referencias	88

VOLUMEN II

	Página
4. INFLUENCIA DE LA VISCOSIDAD EN LA ZONA FLOTANTE	89
4.1. INTRODUCCION	90
4.2. MEDIDOR DEL PAR DE ARRASTRE	91
4.3. BALANZA DE FLEJES	93
4.4. BALANZA DE CERO	95
5. VERIFICACION DEL SISTEMA DE LIMPIEZA DEL MODULO DE FISICA DE FLUIDOS	100
5.1. INTRODUCCION	101
5.2. EL SISTEMA DE LIMPIEZA DE LA CAMARA DE EN- SAYOS DEL FPM	103
5.3. SIMULACION GLOBAL	105
5.4. LIMPIEZA DE UNA SUPERFICIE PLANA MEDIANTE CHORROS PARIETALES	121
5.5. CONCLUSIONES	149
Referencias	153
6. EXPERIMENTO PATRON PARA ESTUDIOS DE VISUALIZA- CION	154
6.1. NECESIDAD DE LOS ENSAYOS	155
6.2. APARATO EXPERIMENTAL	157
6.3. ESTUDIO TEORICO	162
6.4. VERIFICACION	164
6.5. PREPARACION DE LA MUESTRA	168
6.6. FOTOGRAFIAS	173
6.7. CONCLUSIONES	183
Referencias	185

1. ESTABILIDAD DE LAS ZONAS CILINDRICAS CON BORDES LIBRES

1. ESTABILIDAD DE LAS ZONAS CILINDRICAS CON BORDES LIBRES

1.1. INTRODUCCION

Como es sabido, el límite de estabilidad de una zona líquida flotante de forma cilíndrica, mantenida entre dos placas paralelas [1] viene dada por:

$$L_{\max} = \frac{\pi}{2} D \quad (1)$$

(siendo D el diámetro de la zona) y representa una drástica reducción respecto al caso de bordes anclados, ya que la longitud máxima alcanzable es sólo la mitad que en ese caso. Pese a la sencillez del análisis teórico que conduce a (1), no ha sido posible comprobar experimentalmente este resultado, debido por una parte a la dificultad de encontrar una pareja líquido-sólido con ángulo de contacto de 90° y por otra parte, por la inestabilidad intrínseca de las zonas con bordes libres, que impide un manejo controlado de la columna líquida.

Para salvar esta dificultad se ha propuesto el esquema siguiente: las placas soporte se sustituyen por superficies cónicas de revolución con un ángulo tal que se adapte al valor del ángulo de contacto del líquido con el material, de manera a conseguir en todo momento una superficie libre cilíndrica tal como se muestra en la Fig. 1.

El problema que se plantea es el de determinar la longitud máxima estable para esta nueva configuración y la influencia que sobre ella tendrá la superposición de una velocidad angular constante, Ω .

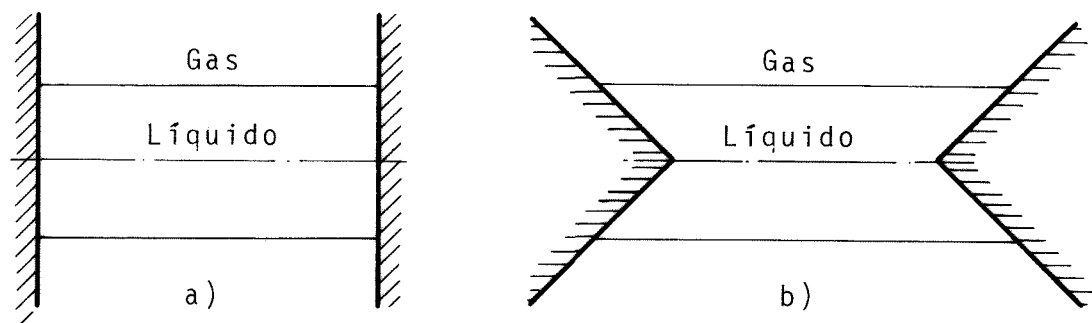


Fig. 1. Esquemas de zonas cilíndricas con bordes libres:
a) soportes planos (zona no estabilizada); b) soportes cónicos (zona estabilizada).

1.2. PLANTEAMIENTO MATEMATICO

Sea una zona flotante con bordes libres mantenida entre dos superficies cónicas como se aprecia en la Fig. 2, que introduce la notación utilizada.

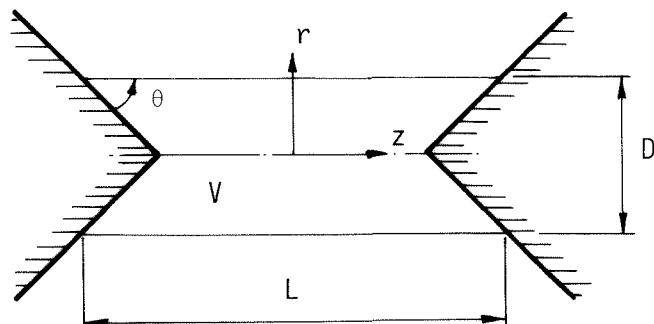


Fig. 2. Nomenclatura utilizada.

El problema físico queda definido por los valores L , V , θ correspondientes a la longitud de la superficie libre, el volumen de líquido y el ángulo de contacto sólido-líquido-gas.

Para estudiar la estabilidad de esta configuración en un caso general utilizamos un método variacional, minimizando la energía manteniendo constante el volumen; es decir:

$$T-U = \text{Mínima} \quad (2)$$

$$V = \text{Constante} \quad (3)$$

siendo T la energía cinética debida a una posible rotación como sólido rígido (nótese que aquí sí tiene sentido considerar este movimiento, que en el caso de soportes planos (Fig. 1.a) era siempre inestable); se tendrá pues

$$T = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 \int_V r^3 dr d\phi dz \quad , \quad (4)$$

siendo V el dominio fluido. La energía potencial U en ausencia de campos externos correspondería aquí a la suma de dos energías superficiales: la energía proporcional a la superficie libre y la energía proporcional a la superficie mojada, que no aparecía en el caso de bordes anclados por ser constante la superficie mojada (tampoco aparecía en el caso de bordes libres con ángulo de contacto $\theta=90^\circ$ ya que esta energía depende del ángulo de contacto y es nula para 90°). En efecto, el equilibrio de tensiones superficiales en la línea de contacto triple (Fig. 3) es (ley de Young):

$$\gamma_{sg} = \gamma_{sl} + \sigma \cos \theta \quad . \quad (5)$$

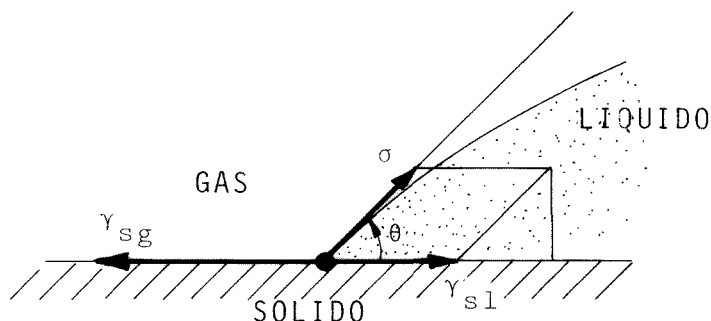


Fig. 3. Equilibrio de tensiones superficiales en la línea de contacto triple.

La energía superficial en una configuración cualquiera sería

$$U = \sigma \Sigma_{\text{libre}} + \gamma_{\text{sg}} \Sigma_{\text{seca}} + \gamma_{\text{sl}} \Sigma_{\text{mojada}} \quad (6)$$

y por tanto, el exceso de energía superficial respecto a una situación de referencia será

$$U = \sigma \left(\int_{\Sigma_{\text{libre}}} r \sqrt{1 + \left(\frac{r\phi}{r} \right)^2 + r_z^2} d\phi dz - \cos\theta \Sigma_{\text{mojada}} \right) \quad (7)$$

donde el área mojada, Σ_{mojada} , vendrá dada por

$$\Sigma_{\text{mojada}} = \frac{1}{\sin\theta} \left(\int_{\odot} r dr d\phi + \int_{\odot} r dr d\phi \right) \quad (8)$$

estando las integrales extendidas a la proyección del área mojada sobre un plano perpendicular al eje de los conos.

Por otra parte, el volumen será simplemente

$$V = \int_V r dr d\phi dz \quad (9)$$

y la función de Lagrange que habrá que minimizar será, según (2) y (3):

$$L = T - U + \lambda V \quad (10)$$

Como es sabido, la condición de extremo

$$\delta L = 0 \quad (11)$$

suministra las formas de equilibrio, y la condición de mínimo

$$\delta^2 L > 0 \quad (12)$$

establecería la estabilidad de dicho equilibrio.

1.3. PERTURBACIONES AXILSIMETRICAS

Estudiaremos aquí el caso particular de la estabilidad frente a perturbaciones axilsimétricas de una zona de diámetro D , longitud L y volumen V , que cumplirán la relación

$$V = \frac{\pi D^2}{4} L - \frac{\pi D^3}{12 \tan \theta} \quad . \quad (13)$$

En este caso de simetría axial, es más sencillo utilizar directamente la ecuación de Laplace, que en forma adimensional es:

$$\frac{r''}{(1+r'^2)^{3/2}} - \frac{1}{r(1+r'^2)^{1/2}} + \omega^2 r^2 + p = 0 \quad (14)$$

como condición de equilibrio mecánico en la superficie libre. Las longitudes se han adimensionalizado con D , $\omega = \sqrt{\frac{\rho \Omega^2 D^3}{2\sigma}}$ es la velocidad angular de rotación, y $p = \frac{p_0 - p_{atm}}{\sigma} D$ es la diferencia de presión en el eje de la zona respecto a la atmósfera exterior.

Para analizar la estabilidad supondremos que la superficie perturbada será (análisis lineal):

$$r(z) = \frac{1}{2} [1 + \varepsilon \eta(z)] \quad , \quad \varepsilon \ll 1 \quad (15)$$

Sustituyendo en (14) y linealizando se obtiene la condición de equilibrio en la perturbación

$$\eta'' + (4 + \omega^2) \eta + p_1 = 0 \quad (16)$$

cuya solución general es de la forma

$$\eta = A \cos 2kz + B \sin 2kz + C \quad (17)$$

siendo $k = \sqrt{1 + \omega^2/4}$.

Los parámetros que definen una solución particular

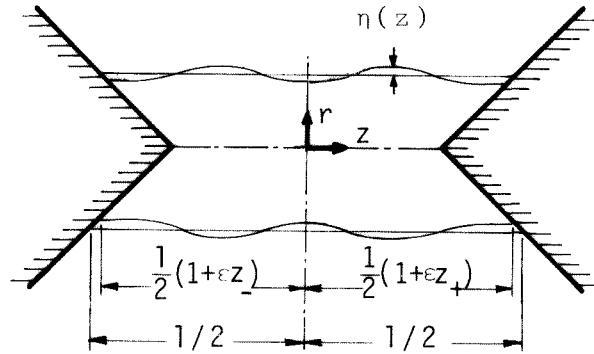


Fig. 4. Zona deformada.

son z_+ , z_- , A , B , C y las ecuaciones de ligadura:

– Adherencia

$$A \cos kl(1+\epsilon z_+) + B \sin kl(1+\epsilon z_+) + C = \frac{\operatorname{tg} \theta}{2} z_+ \quad (18)$$

$$A \cos kl(1+\epsilon z_-) - B \sin kl(1+\epsilon z_-) + C = \frac{\operatorname{tg} \theta}{2} z_- \quad (19)$$

– Angulo de contacto

$$-2A \sin kl(1+\epsilon z_+) + 2B \cos kl(1+\epsilon z_+) = 0 \quad (20)$$

$$2A \sin kl(1+\epsilon z_-) + 2B \cos kl(1+\epsilon z_-) = 0 \quad (21)$$

– Volumen

$$\begin{aligned} & \frac{A}{2} \{ \sin kl(1+\epsilon z_+) + \sin kl(1+\epsilon z_-) \} - \\ & - \frac{B}{2} \{ \cos kl(1+\epsilon z_+) - \cos kl(1+\epsilon z_-) \} + Cl = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Simplificando las ecuaciones (18) a la (22) se llega al sistema:

$$A \cos kl + B \sin kl + C = \frac{\operatorname{tg} \theta}{2} z_+ \quad (23)$$

$$A \cos kl - B \sin kl + C = \frac{\operatorname{tg} \theta}{2} z_- \quad (24)$$

$$-A \sin kl + B \cos kl = 0 \quad (25)$$

$$A \sin kl + B \cos kl = 0 \quad (26)$$

$$A \sin kl + C l = 0 \quad (27)$$

cuyas soluciones distintas de la trivial van siendo

$$kl = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = 0, \quad B = \frac{\operatorname{tg} \theta}{2} z_+, \quad C = 0, \\ z_+ = \text{indeterminado}, \quad z_- = -z_+ \quad (28)$$

$$kl = \pi \Rightarrow A = -\frac{\operatorname{tg} \theta}{2} z_+, \quad B = 0, \quad C = 0, \\ z_+ = \text{indeterminado}, \quad z_- = z_+ \quad (29)$$

y así sucesivamente. Como se aprecia en (28) y (29) se trata de las roturas asimétrica ($kl = \pi/2$) y simétrica ($kl = \pi$) representadas en la Fig. 5.

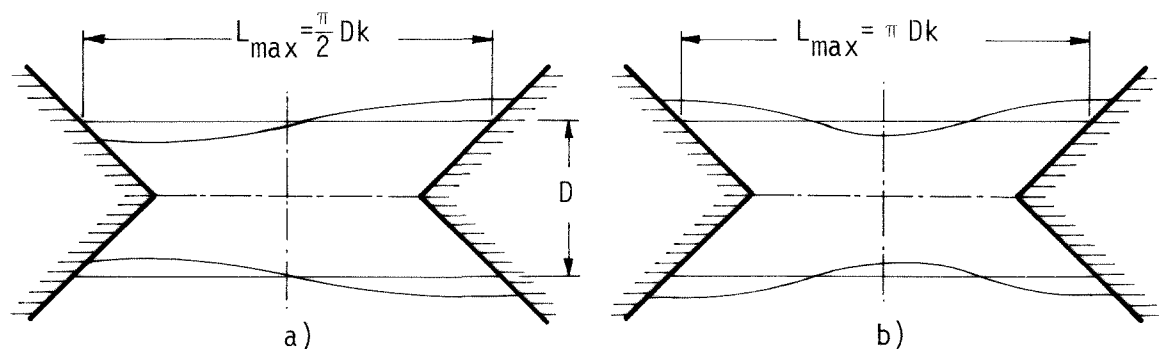


Fig. 5. Modos de rotura de la zona flotante: a) asimétrico; b) simétrico. En general, la rotura será asimétrica pues corresponde a la primera inestabilidad que aparece.

1.4. CONCLUSIONES

Según se desprende del desarrollo realizado, la influencia del ángulo de contacto θ (que es igual al semiángulo del cono) es despreciable en el estudio de la estabilidad de la zona frente a perturbaciones axilsimétricas, dando lu-

gar únicamente a un ligero desplazamiento axial del líquido respecto a la solución conocida de placas planas paralelas.

Respecto a la influencia del ángulo de contacto sobre la estabilidad frente a perturbaciones no axilsimétricas, se está estudiando el efecto de la velocidad angular, pero se puede aventurar que no vayan a aparecer tampoco diferencias respecto al análisis que se hizo del caso $\theta=90^\circ$ excepto, claro está, el hecho en sí de que en este caso sí será factible la experimentación al ser estable la configuración en rotación sólida.

Una conclusión importante que se desprende de este análisis es el hecho de que la estabilidad de una zona cilíndrica no dependerá de la geometría del soporte, lo cual es de interés a la hora de las aplicaciones, pues resultará que, supuesto que la superficie libre del líquido sea cilíndrica, la estabilidad de las zonas fundidas (como las usadas en el crecimiento y purificación de cristales) será independiente de la forma de los frentes de fusión y de solidificación.

REFERENCIAS

1. Martínez, I., 1976, "Floating Zone under Reduced Gravity Axisymmetric Equilibrium Shapes", en Materials Science in Space, ESA SP-114 Sep 1976.

2. MEDIDA DE LA TENSION SUPERFICIAL DE LIQUIDOS POR EL
METODO DE LAS ONDAS CAPILARES

LISTA DE SIMBOLOS

- A, Constante en la ec. (19) y siguientes.
- A_{2m} , Constante en la ec. (29).
- B_{2m} , Constante en la ec. (28).
- D, Profundidad del líquido, [m].
- H, Parámetro que define la forma de la imagen de las ondas capilares, $H=2ha(1+tg^2 i_o)$.
- K, Función en la ec. (27), definida como $K=\int T d\tau$.
- L, Distancia entre los cables de referencia del recipiente, [m].
- N, Número de ondas comprendidas entre los cables de referencia del recipiente.
- P, Diferencia de presiones entre un punto del líquido y la atmosférica, [Pa].
- $S(x)$, Desviación típica de la variable indicada.
- $T(\tau)$, Componente temporal del potencial de velocidades adimensional.
- V, Velocidad, $[m.s^{-1}]$.
- $Z(\zeta)$, Componente vertical del potencial de velocidades adimensional.
- a, Amplitud, [m]. Amplitud adimensional en 1.3.
- a_n, b_n , Coeficientes de la recta de ajuste por mínimos cuadrados.
- b_2 , Primer valor característico de las soluciones pares de período π de la ecuación de Mathieu.
- c_1, c_2 , Constantes en la ec. (18).
- d, Profundidad adimensional del líquido, $d=Dk$.
- f, Frecuencia, [Hz].

- f_o , Error sistemático en las medidas de las frecuencias, [Hz].
- g , Aceleración de la gravedad, $g=gk$, $[m.s^{-2}]$.
- h , Altura adimensional de la cámara y la fuente de iluminación sobre la superficie del líquido.
- i_o , Angulo de reflexión en la línea base, $i_o = \arctg \frac{1}{h}$, [rad].
- k , Versor según el eje Z (ó z).
- k , Número de onda, $k=2\pi\lambda^{-1}$, $[m^{-1}]$.
Constante en las ecs. (43) y (45).
- l , Distancia horizontal adimensional entre cámara fotográfica y fuente de iluminación.
- m, n , Constantes en la ec. (44)
- n , Número de observaciones en un ensayo.
- p , Presión reducida adimensional, $p = \frac{Pk^2}{\rho\omega^2}$.
- p_o , Presión capilar reducida adimensionalizada con $\frac{\rho\omega^2}{k^2}$.
- s , Coeficiente adimensional de tensión superficial reducida líquido-gas, $s = \frac{\sigma}{\rho} \frac{k^3}{\omega^2}$.
- t , Tiempo, [s].
- v , Velocidad adimensional, $v = \frac{V_k}{\omega}$.
- x, y, z , Coordenadas, [m].
- E, \mathbb{I} , Sistema de coordenadas definido en 1.3.
- α , Angulo entre la línea base y uno de los lados del recipiente, [rad].
- Υ , Aceleración de la gravedad, adimensionalizada en la forma $\Upsilon = \frac{gk}{\omega^2}$.
- Υ_o , Aceleración forzada, adimensionalizada con $\frac{\omega^2}{k}$.

- δ , Angulo formado por la normal a la superficie del líquido y la vertical.
- ϵ , Desviación del primer valor característico de las soluciones pares de período π de la ecuación de Mathieu, $\epsilon=1-\frac{b_2}{4}$.
- ζ_0 , Desplazamiento vertical de la superficie del líquido, adimensionalizada con k^{-1} .
- θ , Variable independiente en la ec. (27), definida como $\theta=\frac{\tau}{2}$.
- λ , Longitud de onda, [m].
- λ_i , Longitud de onda de la imagen observada de las ondas capilares, [m].
- ν , Viscosidad cinemática del líquido, [m².s⁻¹].
- ξ, η, ζ , Coordenadas adimensionales, $\xi=kx$, $\eta=ky$, $\zeta=kz$.
- ρ , Densidad del líquido, [kg.m⁻³].
- σ , Coeficiente de tensión superficial líquido-gas, [N.m⁻¹].
- τ , Tiempo adimensional, $\tau=\omega t$.
- ϕ , Potencial de velocidades, adimensionalizado con $\frac{\omega}{k^2}$.
- ω , Pulsación, $\omega=2\pi f$, [s⁻¹].

2. MEDIDA DE LA TENSION SUPERFICIAL DE LIQUIDOS POR EL METODO DE LAS ONDAS CAPILARES

2.1. INTRODUCCION

Cuando por alguna perturbación la superficie de un líquido se deforma desplazándose de su posición de equilibrio, surgen acciones que tienden a restablecer la posición de equilibrio. En efecto, debido al aumento de área asociado a la deformación aparecen fuerzas que tienden a reducir el exceso de energía superficial; las partículas de la superficie son forzadas a regresar a la posición de equilibrio, aunque, debido a efectos inerciales, rebasan dicha posición deformándose la superficie en sentido contrario, la oscilación se repite hasta que, debido a la viscosidad, se disipa la energía comunicada.

Así, tras una perturbación aparecen ondas en la superficie del líquido que se llaman capilares cuando la tensión superficial es la causa principal de la aparición de las ondas y gravitatorias cuando la gravedad es la fuerza restauradora dominante. El fenómeno de las ondas capilares es la base del método para la medida de la tensión superficial denominado, precisamente, de las ondas capilares: se provoca una perturbación que genere este tipo de ondas midiéndose las características de las mismas (frecuencia y longitud de onda) y, con las relaciones adecuadas, se calcula el valor de la tensión superficial con una precisión superior a la obtenida por otros métodos [01].

Las ondas capilares fueron ya analizadas por Faraday en el primer cuarto del siglo XIX (la teoría de olas es

una de las partes mejor desarrolladas de la hidrodinámica), pudiéndose encontrar amplia información en la literatura sobre la teoría bidimensional de las ondas capilares ([01], [02], [03]) y sobre ensayos realizados para medir la tensión superficial basados en este método ([02], [04], [05]).

En el apartado siguiente se examina la teoría tridimensional de las ondas superficiales en un líquido ideal en el que la disipación de energía debida a la viscosidad es despreciable. Se supone que debido a una perturbación forzada aparecen ondas en la superficie del líquido, analizándose la situación en la que la longitud de onda es pequeña comparada con la profundidad del líquido (estas ondas se llaman superficiales en contraposición a las ondas longitudinales en las que la longitud de onda es considerablemente mayor que la profundidad del líquido).

Posteriormente se discute la forma de visualización; la instalación utilizada y el método de trabajo se describen a continuación, y por último se presentan y analizan los resultados obtenidos.

2.2. MODELO MATEMATICO

Sea una cierta masa de líquido contenida en un recipiente paralelepípedo de forma que, en reposo, la profundidad del líquido sea constante. Las ecuaciones que definen el movimiento no estacionario del líquido son:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad , \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} + \mathbf{g} \quad , \quad (2)$$

junto con las condiciones iniciales y de contorno que se especificarán posteriormente. Estas ecuaciones, (1) y (2), admiten una notable simplificación en el caso del movimiento de ondas superficiales; si es a la amplitud, f la frecuencia y λ la longitud de onda de las mismas, será:

$$\frac{\partial V}{\partial t} \sim a f^2 \quad , \quad (3)$$

$$V \cdot \nabla V \sim a^2 f^2 \lambda^{-1} \quad , \quad (4)$$

$$\nu \Delta V \sim \nu a f \lambda^{-2} \quad , \quad (5)$$

consecuentemente, el término viscoso podrá omitirse en (2) si

$$\frac{\partial V}{\partial t} \gg \nu \Delta V \quad , \quad (6)$$

o bien

$$\frac{f \lambda^2}{\nu} \gg 1 \quad . \quad (7)$$

Como se verá más tarde, λ disminuye cuando f aumenta. La relación (7) indica, sin embargo, que los términos viscosos pueden omitirse en (2) cuando la longitud de onda es suficientemente grande, por ejemplo en los ensayos realizados con agua $f \lambda^2 / \nu$ es del orden de 10^3 , lo que justifica la mencionada supresión.

Si además sólo consideramos la situación en la que la amplitud es mucho menor que la longitud de onda:

$$\frac{a}{\lambda} \ll 1 \quad , \quad (8)$$

el término inercial convectivo será despreciable en (2) pues, evidentemente, (8) es equivalente a

$$\frac{\partial V}{\partial t} \gg V \cdot \nabla V \quad . \quad (9)$$

En resumen, tomando los inversos del número de onda, $k=2\pi\lambda^{-1}$, y de la pulsación, $\omega=2\pi f$, como distancia y tiempo característicos, las ecuaciones (1) y (2), con las simplificaciones indicadas anteriormente, se reducen a

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad , \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} = -\nabla p + \Upsilon \quad , \quad (11)$$

indicando ahora el operador ∇ derivada respecto a las coordenadas espaciales adimensionalizadas y siendo Υ la aceleración de la gravedad adimensionalizada con $\omega^2 k^{-1}$.

Supongamos que se somete al conjunto líquido-recipiente a una aceleración periódica vertical de frecuencia f . Si tomamos unos ejes ligados al recipiente tal como se indica en la figura 1, las ecuaciones del movimiento en esos ejes son las mismas (10) y (11) sin más que considerar que el término Υ en (11) será ahora $(\Upsilon - \Upsilon_0 \cos \tau)k$. Bajo estas circuns-

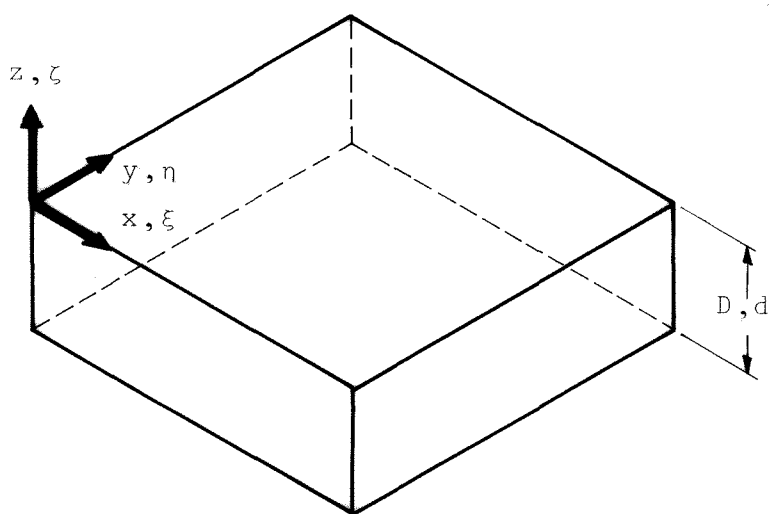


Fig. 1. Geometría y sistema de coordenadas (a la derecha, los valores adimensionalizados correspondientes).

tancias el movimiento es potencial, es decir

$$\mathbf{v} = \nabla\phi \quad , \quad (12)$$

debiendo satisfacer la función ϕ la ecuación de Laplace:

$$\Delta\phi = 0 \quad , \quad (13)$$

consecuencia de sustituir (12) en (10). La ecuación (11) que
dará

$$\nabla \frac{\partial\phi}{\partial\tau} = -\nabla p - (\gamma - \gamma_0 \cos \tau) \mathbf{k} \quad , \quad (14)$$

que integrada resulta:

$$p = -\frac{\partial\phi}{\partial\tau} - (\gamma - \gamma_0 \cos \tau) \zeta \quad . \quad (15)$$

Para resolver la ecuación (13) ensayaremos solu
ciones de la forma:

$$\phi = Z(\zeta)(\cos\xi + \cos\eta)T(\tau) \quad . \quad (16)$$

Quizá quepa preguntarse, a la vista de (16), si es
acertado o no suponer que los trenes de ondas según ξ y η in
cluídos en la expresión de ϕ tienen la misma longitud de on-
da. Una forma intuitiva de comprobar que λ es la misma para
ambos trenes es considerar que las ondas son la superposición
de las ondas que se formarían si oscilaran cada uno de los
lados del recipiente aisladamente. La longitud de onda depen
de únicamente de las propiedades del fluido y de la frecuen-
cia de la perturbación y es independiente de la esbeltez de
la forma en planta del recipiente. Así, λ no tiene por qué ser
un divisor exacto de las longitudes de los lados del recipien
te, ya que la ecuación (16) deja de ser válida cerca de los
lados del recipiente donde la superficie del líquido no es

horizontal (ni aún en reposo) existiendo cerca de los lados una zona de acomodación.

Sustituyendo (16) en (13) resulta la siguiente ecuación para Z:

$$\frac{d^2 Z}{d\zeta^2} - Z = 0 \quad , \quad (17)$$

cuya solución es del tipo:

$$Z = c_1 e^{\zeta} + c_2 e^{-\zeta} \quad . \quad (18)$$

Como la velocidad vertical ha de ser nula cuando $\zeta \rightarrow -d$, quedará

$$\phi = A \operatorname{ch}(\zeta+d)(\cos \xi + \cos \eta)T(\tau) \quad , \quad (19)$$

y T se calcula de forma que se cumpla la condición de contorno en la superficie libre:

$$p + p_{\sigma} = 0 \quad , \quad (20)$$

donde p_{σ} es la presión capilar adimensional.

Llamando $\zeta_0(\xi, \eta, \tau)$ al desplazamiento vertical de las partículas de la superficie del líquido respecto a la posición de equilibrio ($\zeta=0$), la velocidad vertical de un punto de la superficie será:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=\zeta_0} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial \tau} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial \xi} \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\tau} \quad (21)$$

si la amplitud es pequeña (recuérdese (8)) el segundo y tercer términos del segundo miembro de (21) son infinitésimos de segundo orden; por otra parte el error cometido al imponer (21) en $\zeta=0$ en vez de $\zeta=\zeta_0$ también es un infinitésimo de segundo orden; por tanto, en primera aproximación, la ecuación

ción (21) resulta:

$$\frac{\partial \zeta_o}{\partial \tau} = \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} , \quad (22)$$

que permite calcular la forma de la superficie libre:

$$\zeta_o = A \operatorname{sh} d (\cos \xi + \cos \eta) \int T(\tau) d\tau , \quad (23)$$

volviendo a la ecuación (20), teniendo en cuenta (15) y que

$$p_\sigma = s \left(\frac{\partial^2 \zeta_o}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \zeta_o}{\partial \eta^2} \right) , \quad (24)$$

quedará:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \Big|_{\zeta=0} - (\gamma - \gamma \cos \tau) \zeta_o + s \left(\frac{\partial^2 \zeta_o}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \zeta_o}{\partial \eta^2} \right) = 0 , \quad (25)$$

y sustituyendo ϕ y ζ_o según las expresiones (19) y (23) resulta la siguiente ecuación para $T(\tau)$:

$$\frac{dT}{d\tau} + (s + \gamma - \gamma_o \cos \tau) \int T d\tau = 0 , \quad (26)$$

habiéndose tomado $\operatorname{th} d \approx 1$, pues al ser la profundidad del líquido mucho mayor que la longitud de onda será $d \gg 1$.

Tomando $K = \int T d\tau$ como función y $\theta = \frac{\tau}{2}$ como variable independiente, la ecuación (26) se transforma en

$$\frac{d^2 K}{d\theta^2} + 4(s + \gamma - \gamma_o \cos 2\theta) K = 0 , \quad (27)$$

que es la llamada ecuación de Mathieu, ampliamente tratada en la literatura ([06], [07]). Dada la naturaleza del problema buscamos para K soluciones periódicas no amortiguadas de período π , es decir:

$$K = \sum_{1}^{\infty} B_{2m} \operatorname{sen} 2m\theta , \quad (28)$$

o bien:

$$K = \sum_0^{\infty} A_{2m} \cos 2m\theta \quad , \quad (29)$$

soluciones que sólo tienen lugar para ciertos valores del parámetro $4(s+\gamma)$ llamados valores característicos o permitidos.

Hace falta, además, un criterio de conservación para dilucidar cuál de los dos tipos de solución, (28) ó (29), es la correcta. Este criterio puede ser que el valor medio de la amplitud de las ondas ha de ser nulo en cualquier punto (ξ_0, η_0) de la superficie del líquido:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta_0(\xi_0, \eta_0, \tau) d\tau \sim \int_0^{\pi} K(\theta) d\theta = 0$$

lo que obviamente, sólo es posible con soluciones del tipo de la expresión (28).

El primer valor característico, b_2 , de la ecuación (27) cuando se imponen soluciones del tipo (28) es aproximadamente 4 en el intervalo de valores de γ_0 utilizado en los ensayos (correspondiendo el valor 4 a $\gamma_0=0$, es decir, cuando no existe aceleración impuesta), lo que significa, en primera aproximación:

$$s+\gamma = 1 \quad , \quad (30)$$

o, en variables físicas:

$$\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda^3} + \frac{g}{2\pi\lambda} = f^2 \quad , \quad (31)$$

y si la longitud de onda es suficientemente pequeña, el término dependiente de la gravedad será despreciable frente al de tensión superficial, quedando

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \rho \lambda^3 f^2 \quad , \quad (32)$$

que coincide con la expresión calculada por Lord Rayleigh y otros usando teoría bidimensional ([01], [02], [03]).

En nuestro caso, teniendo en cuenta que el primer valor característico no vale exactamente 4, la equivalente a la ecuación (30) sería

$$s + \gamma = \frac{b}{4} = 1 - \epsilon \quad . \quad (33)$$

En la figura 2 se ha representado ϵ en función de γ_0 , en dicha figura se ha representado también la banda de valores de γ correspondientes a los ensayos. Consecuentemente, si para valores pequeños de λ está justificado despreciar γ frente a s también lo estará despreciar ϵ frente a 1 quedando la expresión (33) reducida a:

$$s = 1 \quad (34)$$

que, en variables físicas, coincide con la ecuación (32).

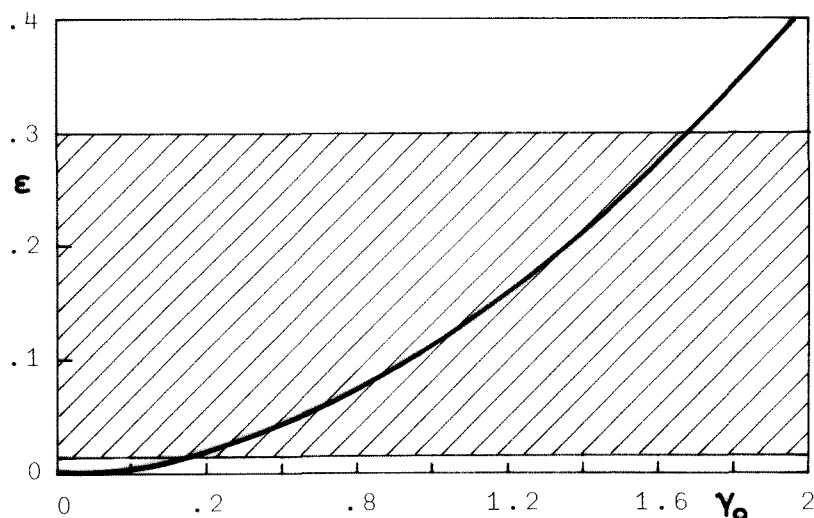


Fig. 2. Variación de ϵ , definido en la ecuación (33), con la aceleración forzada adimensional γ_0 . La banda rayada corresponde a los valores de la gravedad adimensional en los ensayos.

En resumen, el movimiento oscilatorio del conjunto líquido-recipiente ocasiona la formación de ondas capilares en la superficie del líquido; eligiendo adecuadamente la frecuencia de la oscilación para que la longitud de onda sea suficientemente pequeña son dominantes los efectos de tensión superficial frente a los gravitatorios y en tal caso es posible obtener una relación sencilla entre λ , f y σ . En otras palabras, fijada una frecuencia de excitación bastará con medir la longitud de onda de las olas superficiales para determinar, de acuerdo con la expresión (32), la tensión superficial del líquido en ensayo.

2.3. VISUALIZACION DE LAS ONDAS

Establecida la relación entre frecuencia, longitud de onda y tensión superficial, el problema estriba ahora en determinar el valor de la longitud de onda mediante un experimento con la mayor precisión posible. Como se explicará posteriormente con más detalle, la longitud de onda se ha determinado contando el número de ondas superficiales comprendidas entre dos marcas fijas en el recipiente vibrante. En consecuencia interesa que el modo de visualización permita obtener imágenes nítidas y fácilmente interpretables. En lo que sigue supondremos que la imagen se registra fotográficamente.

Una vez puesto en vibración el conjunto líquido-recipiente, en la superficie del líquido se forman dos trenes de ondas estacionarias perpendiculares entre sí y paralelas a los lados del recipiente como se esquematiza en la figura 3, donde las líneas gruesas representan las crestas de las

ondas y las finas los valles en el instante en que las ondas tienen la máxima amplitud; en ese instante, donde dos líneas gruesas se unen habrá un máximo absoluto, y un mínimo absolu

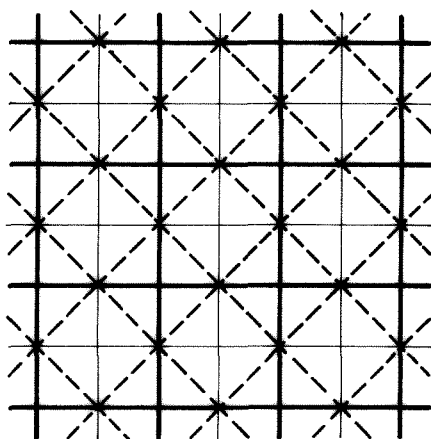


Fig. 3. Esquema de la superficie del líquido en un instante de máxima amplitud.

———— crestas de las ondas
———— valles
----- líneas nodales

to en los puntos de intersección de las líneas finas; las líneas a trazos representan líneas nodales (obviamente pasan por los puntos de unión de líneas finas y gruesas). Un cuarto de período después del instante considerado la superficie será plana y al siguiente cuarto de período la situación se habrá invertido, ocupando ahora los valles las zonas que anteriormente ocupaban las crestas y viceversa. En la figura 4 se muestra un modelo tridimensional de la superficie del líquido; en el modelo están muy ampliadas las distancias verticales.

Puede parecer que lo deseable sería fotografiar desde una dirección perpendicular a la superficie del líquido en reposo. Desde esta posición (utilizando una técnica de

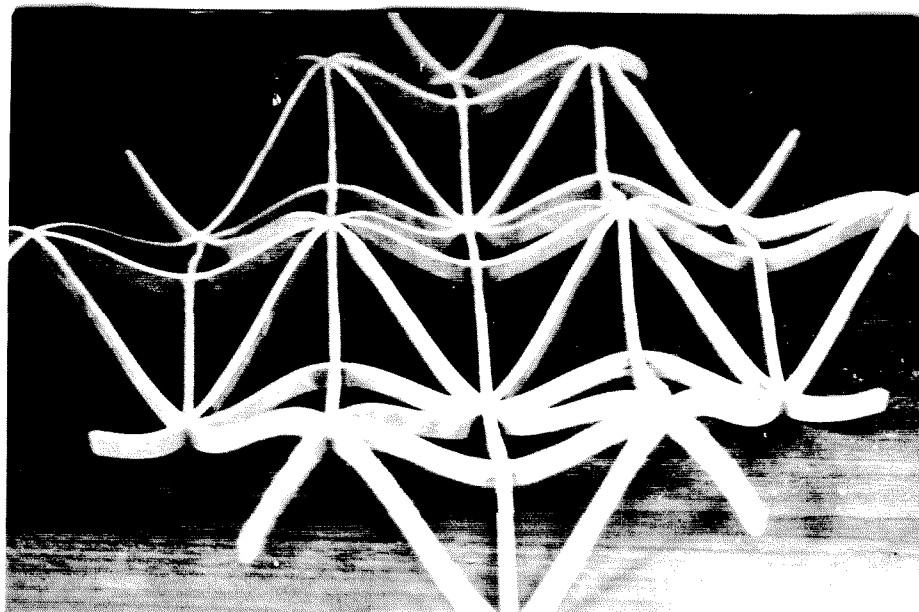


Fig. 4. Maqueta tridimensional de la superficie del líquido.

iluminación estroboscópica como se explicará en el apartado siguiente) la imagen sería una cuadrícula de lado λ con zonas claras y oscuras correspondientes a valles y crestas; esta disposición, sin embargo, presenta ciertas dificultades -por ejemplo, la imposibilidad de colocar cámara y focos en una misma vertical- y además, como se comprobó experimentalmente, se pueden obtener mejores imágenes fotografiando desde una dirección no perpendicular a la superficie del líquido en reposo.

Supongamos que la amplitud de las ondas es constante a lo largo de la superficie y que la cámara fotográfica y la fuente de iluminación están a una altura h , adimensionalizada con λ , muy grande de la superficie del líquido ($h \gg 1$); supongamos también que colocamos delante de la fuente de ilu

minación una pantalla opaca con una ranura y que la cámara fotográfica posee un diafragma "bidimensional", estando dispuestos diafragma y ranura paralelos entre si y paralelos am bos a la superficie del líquido en reposo; en estas condiciones la imagen de la ranura se formará sobre el agua a lo largo de una línea recta (que llamaremos línea base), precisamente en aquellos puntos donde los rayos incidente y reflejado formen con la normal local un ángulo $i_o = \arctg \frac{1}{h}$, tal como se indica en la figura 5. Si la superficie está deformada

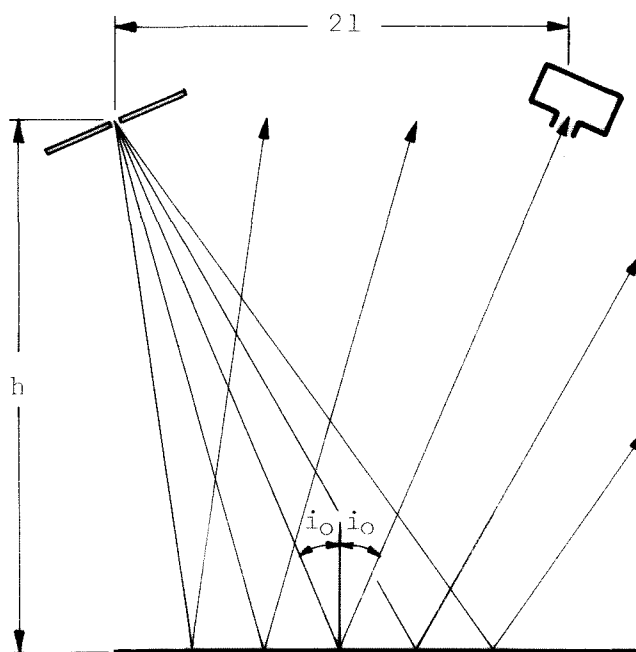


Fig. 5. Imagen de la ranura sobre la superficie del líquido en reposo. $i_o = \arctg (1/h)$, donde $2l$ es la distancia adimensional entre ranura y diafragma y h la altura adimensional sobre la superficie del líquido.

y analizamos lo que ocurre en un plano perpendicular a la ra nura -que será también perpendicular a la "ranura" del diafragma y a la superficie del líquido en reposo- la imagen puede formarse en más de un punto de la superficie tal como se muestra en la figura 6, y lo mismo ocurrirá en planos paralelos

los al considerado. En consecuencia, el lugar geométrico de estos puntos al considerar los diversos planos nos dará la imagen de la ranura sobre la superficie. Se ha de tener en

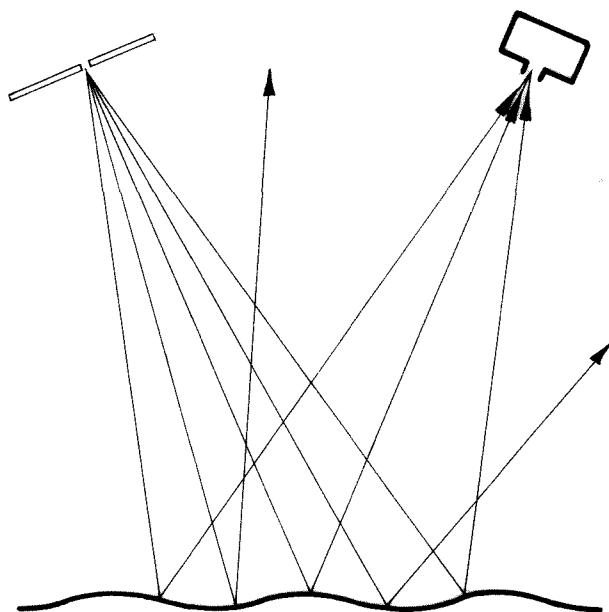


Fig. 6. Imagen de la ranura sobre la superficie deformada del líquido.

cuenta, además, que la línea intersección de la superficie con planos perpendiculares al anterior (paralelos a la ranura) no es una recta; debido pues a que en esta dirección el ángulo de reflexión varía de un punto a otro, la línea imagen aparecerá con intensidad variable (figura 7).

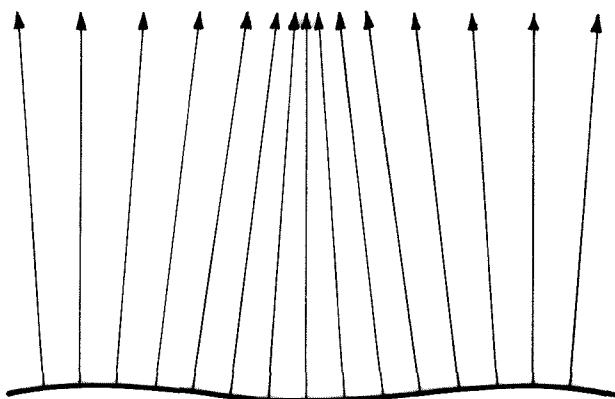


Fig. 7. Variación de la intensidad luminosa de la imagen sobre la superficie deformada.

Según la expresión (23), la ecuación de la superficie en el instante considerado es:

$$\zeta_0 = a(\cos \xi + \cos \eta) \quad , \quad (35)$$

definimos un nuevo sistema de ejes (figura 8) de forma que el eje E sea paralelo a la línea base, será:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= E - \eta \operatorname{tg} \alpha \\ \eta &= E \operatorname{tg} \alpha + \eta \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Nótese que α es el ángulo formado por un lado del recipiente y la imagen de la ranura sobre la superficie no formada (línea base) y que, para cada valor de α , los nuevos ejes se obtienen de los primitivos mediante un giro y una di

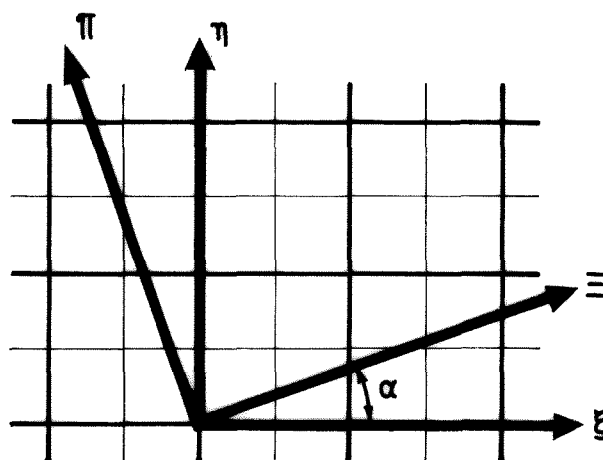


Fig. 8. Definición de los ejes E, η.

latación de coordenadas proporcional a $1/\cos \alpha$. En el nuevo sistema de ejes la ecuación de la superficie será:

$$\zeta_0 = a[\cos(E - \eta \operatorname{tg} \alpha) + \cos(E \operatorname{tg} \alpha + \eta)] \quad , \quad (37)$$

en estos ejes, fijadas las posiciones de la ranura y el diafragma (que serán paralelos al eje E), la imagen de la línea base será una cierta línea de ecuación $\eta = \eta_0$. Supongamos que

la superficie está deformada y consideremos un plano tal que una de las reflexiones ocurre precisamente en $\eta = \eta_0$ (punto de tangente horizontal). Vamos a analizar si la imagen puede formarse también en algún punto próximo; esto ocurrirá -en primera aproximación- si un par de rayos (incidente y reflejado) que forman con los iniciales un ángulo $\delta \ll 1$ se reflejan en un punto donde la normal local forma con la vertical un ángulo δ (figura 9), es decir, donde el ángulo entre la tangente a la

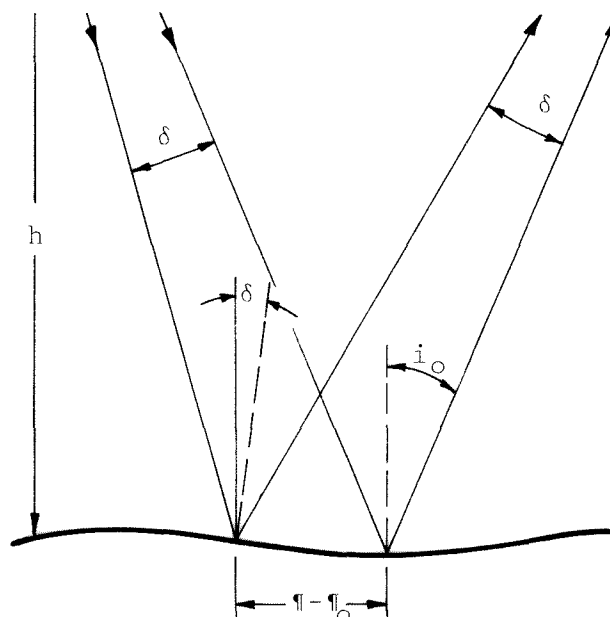


Fig. 9. Formación de la imagen sobre la superficie deformada.

curva y la horizontal valga δ :

$$\left. \frac{\partial \zeta_0}{\partial \eta} \right|_{\eta = \eta_0} = -\operatorname{tg} \delta, \quad (38)$$

donde $\operatorname{tg} \delta$, según la figura 9, vendrá dado por la ecuación:

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 i_0}{1 - \operatorname{tg} i_0 \cdot \operatorname{tg} \delta} \operatorname{tg} \delta = \frac{\eta - \eta_0}{h}, \quad (39)$$

que con la hipótesis anterior ($\delta \ll 1$), y siempre que i_0 no tenga un valor próximo a $\pi/2$, se reduce a:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\eta - \eta_o}{h} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 i_o}, \quad (40)$$

por tanto, la ecuación (38) al considerar cualquier plano $E = \text{cte}$, quedará:

$$\frac{\partial \zeta_o}{\partial \eta} = - \frac{\eta - \eta_o}{h} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 i_o}, \quad (41)$$

que junto con la ecuación de la superficie (37) dará la curva imagen; la expresión se simplifica notablemente si se considera como imagen la proyección de dicha curva sobre el plano $\zeta = 0$, lo que sólo está justificado si la amplitud de las ondas es mucho menor que su longitud de onda (recuérdese la expresión (8)); en tal caso la ecuación de la imagen será:

$$\left. \frac{\partial \zeta_o}{\partial \eta} \right|_{\zeta_o = 0} = - \frac{\eta - \eta_o}{h} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 i_o}, \quad (42)$$

Antes de seguir conviene hacer algunas puntualizaciones. En primer lugar, el razonamiento seguido para obtener la expresión (42) deja indeterminado el origen, E_o , de la imagen, lo que carece de importancia dado que sólo estamos interesados en la forma de la imagen y el origen se puede elegir arbitrariamente.

En segundo lugar, no se ha considerado la otra componente del gradiente de la superficie, $\partial \zeta_o / \partial E$, para la obtención de la imagen; considerar esta componente, como se razonó anteriormente, no modifica la forma de la imagen, únicamente la intensidad luminosa a lo largo de la misma.

El tercer punto se refiere al paralelismo asociado a un diafragma bidimensional. El diafragma de una cámara po-

dría idealizarse por un punto, pero no por una recta; así pues, la solución obtenida se irá diferenciando de la imagen observada conforme nos alejamos del plano perpendicular a la ranura que contiene al diafragma. Sin embargo, la deformación en la imagen observada se debe más al hecho de que la amplitud de las ondas no es constante (máxima en los bordes del recipiente y mínima en el centro) que a la falta de paralelismo.

En resumen, la ecuación de la imagen será:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen}(\Xi - \eta \operatorname{tg} \alpha) - \operatorname{sen}(\Xi \operatorname{tg} \alpha + \eta) = - \frac{\eta - \eta_0}{ah} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 i_0} \quad (43)$$

La imagen sólo será periódica cuando los ejes (y por tanto la línea base) vuelvan a pasar por puntos de características similares al origen, es decir, cuando $\operatorname{tg} \alpha = n/m$ siendo n y m números enteros; si n y m son los menores enteros que representan dicha fracción y λ_i la longitud de onda de la imagen, la longitud de onda real de las ondas capilares será:

$$\lambda = \lambda_i (n^2 + m^2)^{-1/2} = \frac{\lambda_i}{m} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2} = \frac{\lambda_i}{m \cos \alpha} \quad (44)$$

Existen dos casos extremos. Si fuese $\alpha = 0$ (línea base paralela a uno de los lados del recipiente) la ecuación (43) se reduce a

$$\operatorname{sen} \eta = \frac{\eta - \eta_0}{ah} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 i_0}, \quad (45)$$

y la imagen será una o varias líneas rectas ($\eta = \text{cte}$) de intensidad variable. Esta es la posición más desfavorable para la visualización.

Cuando $\alpha=45^\circ$ la ecuación de la imagen queda

$$E = \arccos \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2ah \sin \varphi} \frac{1}{1 + \tan^2 i_0} \right), \quad (46)$$

y $\lambda = \lambda_i / \sqrt{2}$, siendo este el valor de α para el que λ_i es mínima. Este caso corresponde a la posición más favorable para la visualización.

En las páginas siguientes se muestran algunas de las imágenes obtenidas mediante la expresión (46) para distintos valores del parámetro H ($H=2ah(1+\tan^2 i_0)$) y varias posiciones de la línea base. El análisis de las imágenes se puede abordar en este caso ($\alpha=45^\circ$) con cierta simplicidad, por ejemplo, fijar un valor de E y estudiar los valores permitidos de φ . Si $E=k\pi$ ($k=0,1,2,\dots$) la ecuación (46) se reduce a

$$\sin \varphi = \pm (\varphi - \varphi_0) / H, \quad (47)$$

correspondiendo el signo positivo al caso $E=0$ (o múltiplo par de π) y el signo negativo a $E=\pi$ (o múltiplo impar de π). En la figura 10 se presenta la solución gráfica de esta ecuación, la imagen se formará en los puntos de intersección de la función $\sin \varphi$ con las rectas $(\varphi - \varphi_0) / H$ (líneas llenas, $E=0$) ó $-(\varphi - \varphi_0) / H$ (líneas de trazos, $E=\pi$). En la figura 10-a, $\varphi_0=0$, se observa que si $E=0$ la única solución posible es $\varphi=0$ para valores de H menores a la unidad y que la imagen se forma en tres puntos distintos si $H>1$, en $E=\pi$ la única solución es $\varphi=0$ para $H<4.6$, valor para el que la recta es tangente a la senoide, y a partir de este valor la imagen se formará en cinco puntos. Análogamente, en el caso $\varphi_0=\pi/2$ (figura 10-b) recta y senoide se cortan en un único punto si $H<2.97$ y en

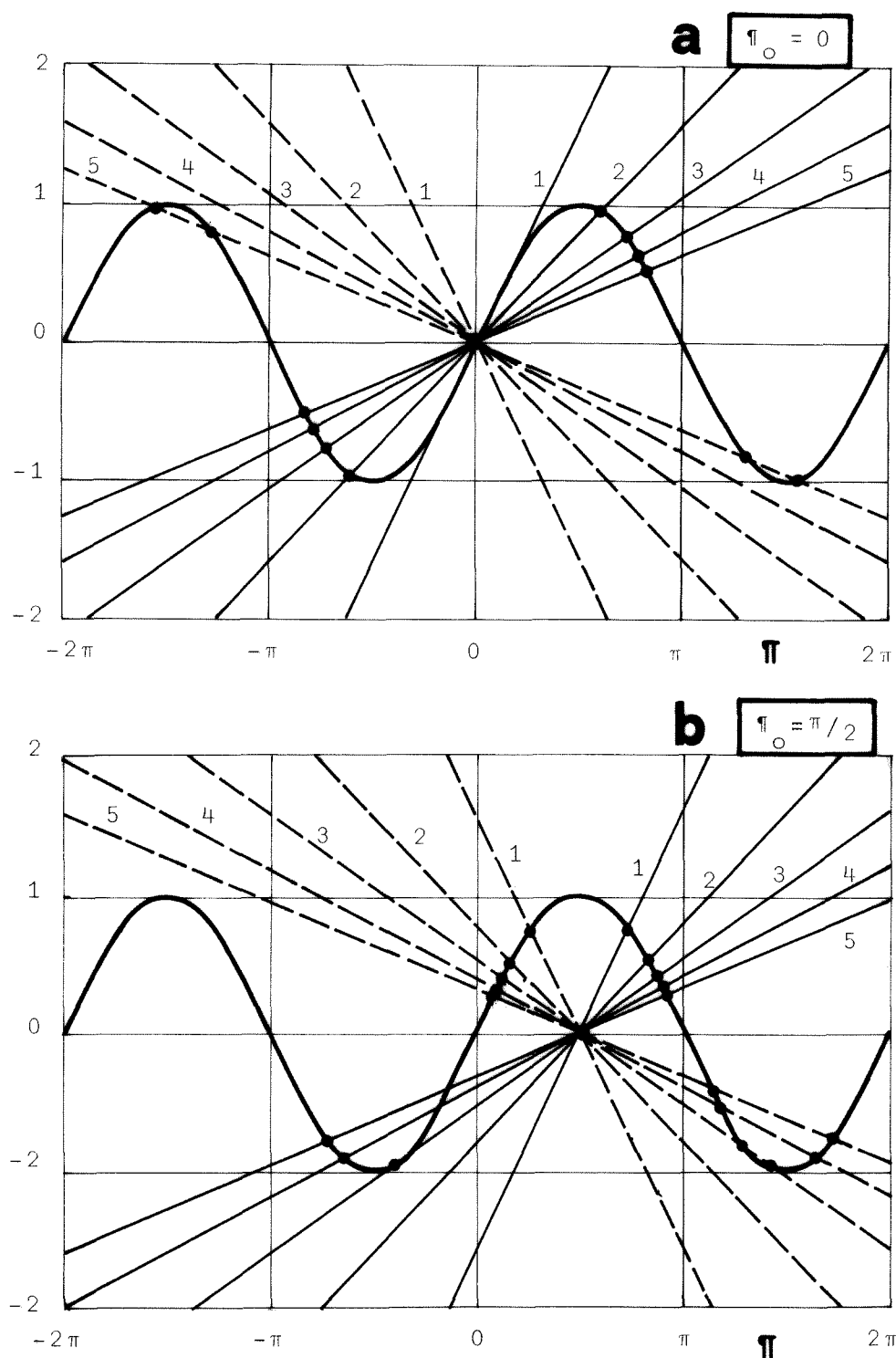


Fig. 10. Solución gráfica de la ecuación (47): $\cos \Xi \sin \varphi = (\varphi - \varphi_0)/H$. Las líneas llenas corresponden al caso $\Xi = 2k\pi$ ($k=0,1,2,\dots$) y las de trazos a $\Xi = 2(k+1)\pi$ ($k=0,1,2,\dots$). Los números sobre las rectas indican el valor de H .

tres para $H > 2.97$ (en este caso las imágenes en $E=0$ y $E=\pi$ son antisimétricas).

De igual forma se podría proceder para otros valores de E (lo que significaría multiplicar la escala vertical de la senoide por $\cos E$); por ejemplo, si $E=\pi/2$ la imagen sólo puede formarse en $\varphi=\varphi_0$. Todo lo anterior se resume en las figuras 11, 12, 13, 14 y 15 donde se muestran las imágenes teóricas para $H=1, 2, 3, 4$ y 5 respectivamente. Cuando $H=1$ (figura 11) la imagen es una recta si $\varphi_0=0$ y adopta una forma ondulada simple para cualquier otro valor de φ_0 . En la figura 12 se representa el caso $H=2$; para este valor de H aparecen bucles en la línea $\varphi_0=0$ (la imagen de esta línea es un rosario de zonas ovaladas unidas por una recta) que se rompen en dos zonas al separarnos de dicha posición: una línea ondulada y bucles aislados cuya área va disminuyendo hasta desaparecer (en el caso $H=2$ las imágenes correspondientes a $\varphi_0=\pi/4$ y $\varphi_0=\pi/2$ son aún líneas onduladas simples). El área de los bucles va aumentando conforme crece H y para $H=3$ (figura 13) la imagen de la línea $\varphi_0=\pi/2$ es una línea ondulada bordeada de bucles dispuestos alternativamente a un lado y a otro de la línea central. Esta descomposición de la imagen en tres zonas se presentará para valores cada vez más bajos de φ_0 al crecer H (figura 14, $H=4$) hasta que en $H=4.6$ también la imagen correspondiente a $\varphi_0=0$ presenta zonas luminosas fuera de la imagen central tal como se muestra en la figura 15 ($H=5$). Estos últimos casos son, sin embargo, poco realistas; en un ensayo, una vez fijadas las posiciones de la cámara y de la fuente de iluminación, la forma de obtener valores altos del

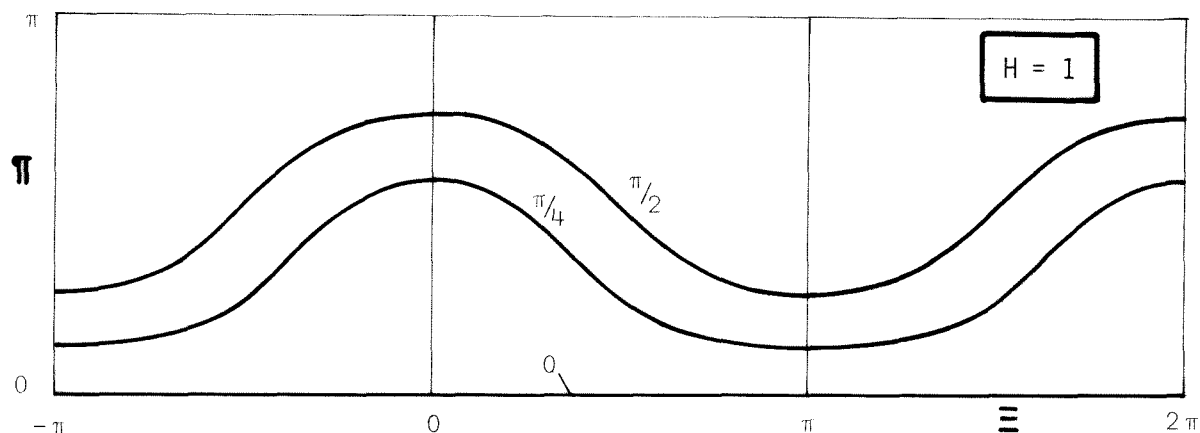


Fig. 11. Imagen calculada de una ranura luminosa reflejada sobre la superficie de un líquido contenido en un recipiente cuadrado sometido a vibración vertical. Los números en las curvas indican la posición de la línea base (paralela a una de las diagonales del recipiente).

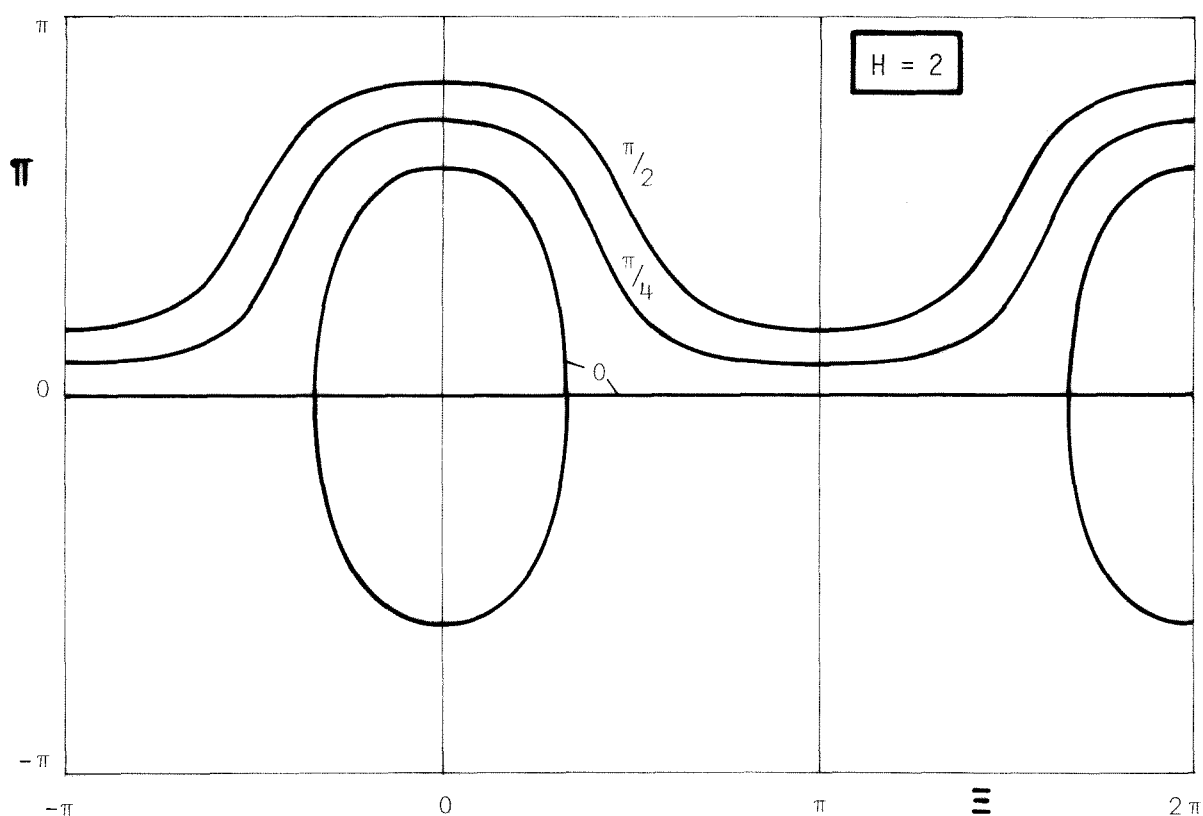


Fig. 12. Imagen calculada de una ranura luminosa reflejada sobre la superficie de un líquido contenido en un recipiente cuadrado sometido a vibración vertical. Los números en las curvas indican la posición de la línea base (paralela a una de las diagonales del recipiente).

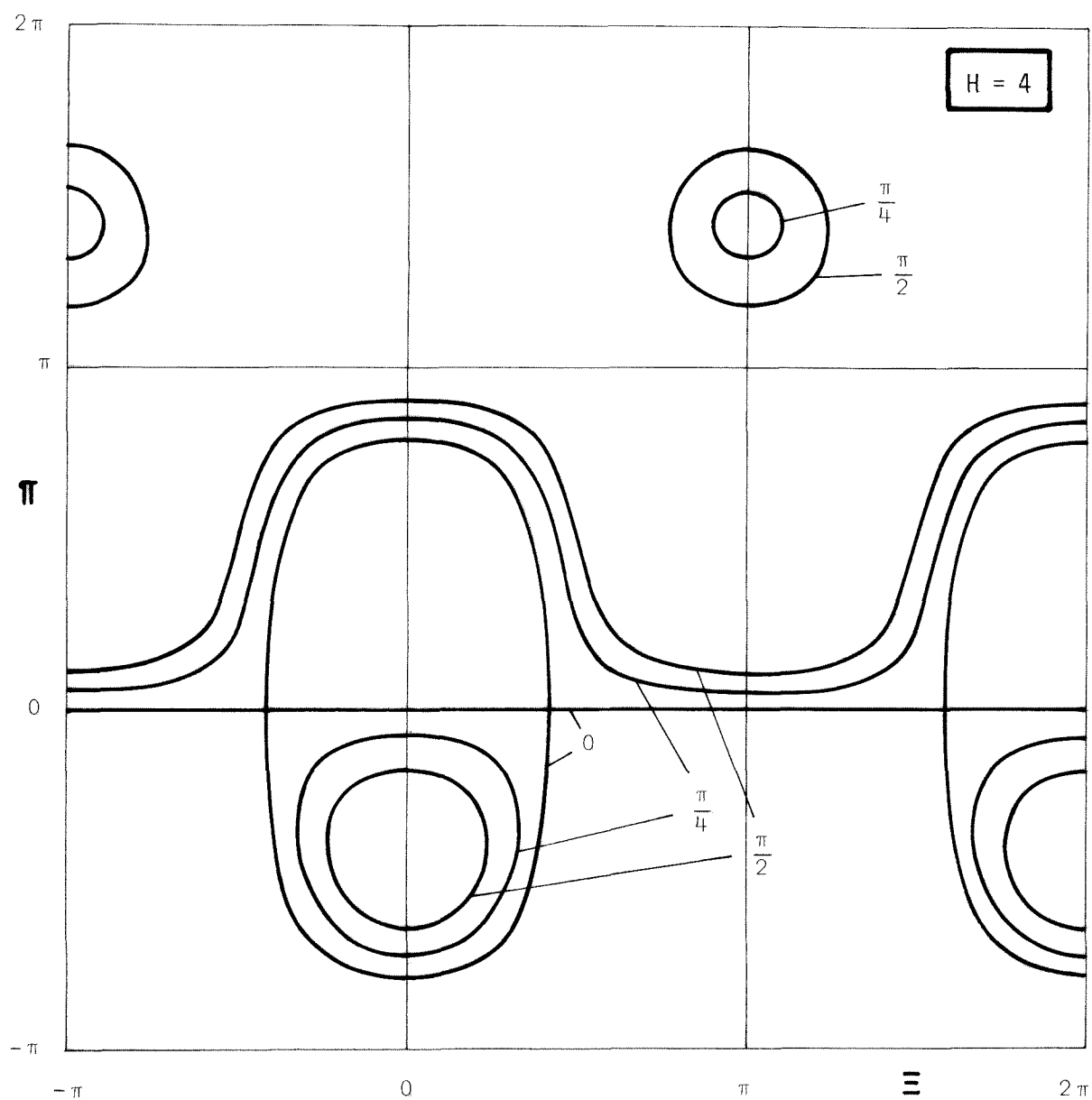


Fig. 14. Imagen calculada de una ranura luminosa reflejada sobre la superficie de un líquido contenido en un recipiente cuadrado sometido a vibración vertical. Los números en las curvas indican la posición de la línea base (paralela a una de las diagonales del recipiente).

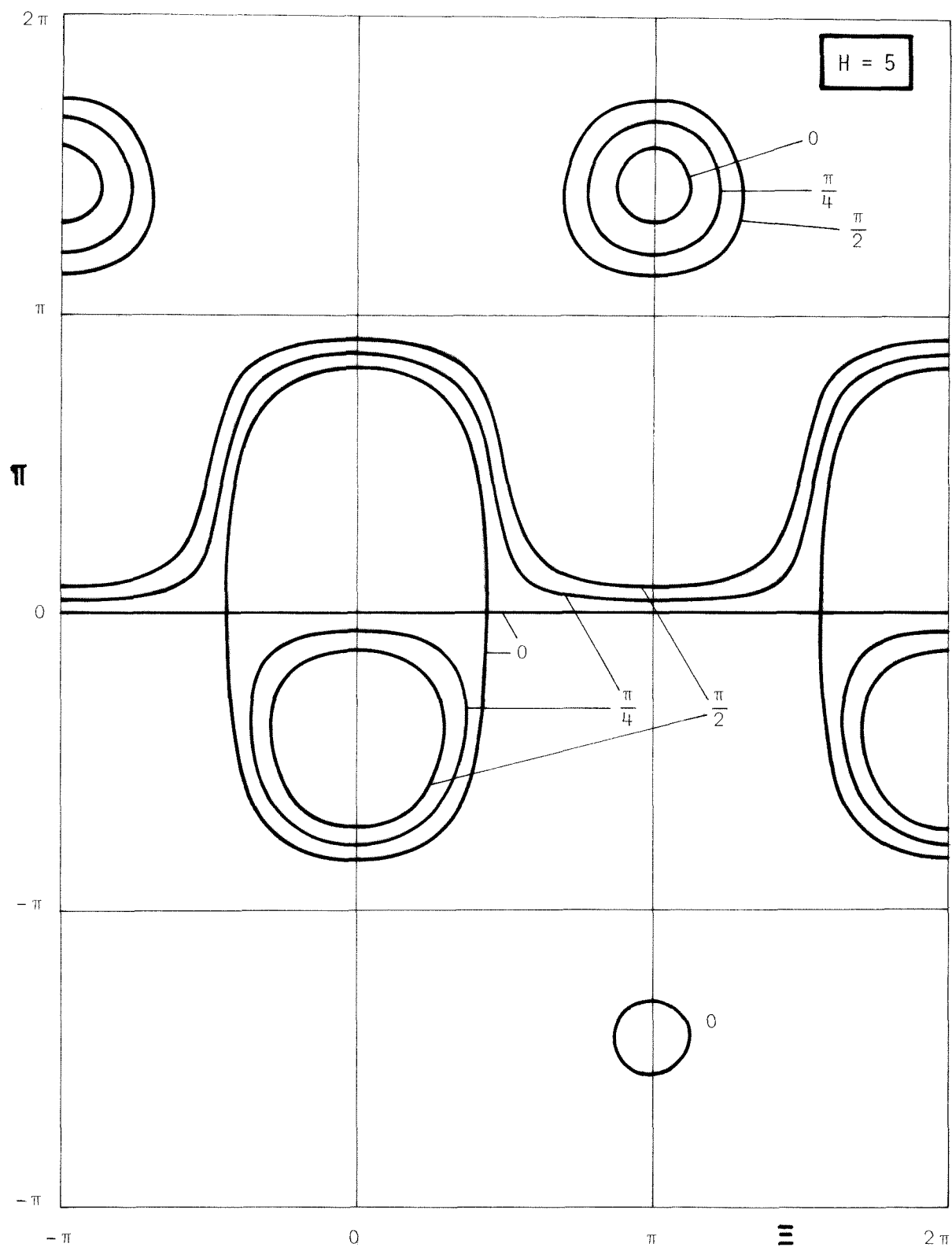


Fig. 15. Imagen calculada de una ranura luminosa reflejada sobre la superficie de un líquido contenido en un recipiente cuadrado sometido a vibración vertical. Los números en las curvas indican la posición de la línea base (paralela a una de las diagonales del recipiente).

parámetro H es aumentando la amplitud de la excitación; a altas amplitudes, aparecen inestabilidades que dan lugar a una configuración no periódica e irregular en la superficie del líquido y no vale la teoría anteriormente desarrollada.

En la figura 16 se comparan algunas de las imágenes reales con las obtenidas analíticamente. Las fotografías corresponden a la imagen de la ranura sobre ondas capilares con una longitud de onda de 6.6×10^{-3} m. ($\lambda_i = 9.4 \times 10^{-3}$ m). En la figura se muestra los negativos de dichas fotografías (las zonas negras representan las zonas iluminadas) ampliados unas 60 veces, la diferencia de grosor de unas a otras se debe a un ligero desenfoque en la filmación. Debajo de cada imagen real se muestra la solución analítica correspondiente, las curvas son análogas a las presentadas en las figuras anteriores con la escala vertical disminuida proporcionalmente al coseno del ángulo de inclinación de la cámara respecto a la vertical -45° para que dicha escala coincida con las fotografías. La línea central coincide con la línea media de las imágenes y la zona rayada se ha calculado de forma que el grosor de la imagen real y analítica coincidan en $E=0, \pi, \dots$. Como se observa, las imágenes difieren apreciablemente para $E=\pi/2, 3\pi/2$, etc., la razón de esta discrepancia está, como se señaló anteriormente, en que la intensidad luminosa de la imagen varía periódicamente según E , es decir, ciertas zonas de la imagen son más luminosas que otras, lo que se traduce en un espesor variable en la imagen fotográfica (proporcional a la componente del gradiente de la superficie según E , $\partial \zeta_0 / \partial E$, término que no se tuvo en cuenta al calcular la forma teórica de la imagen).

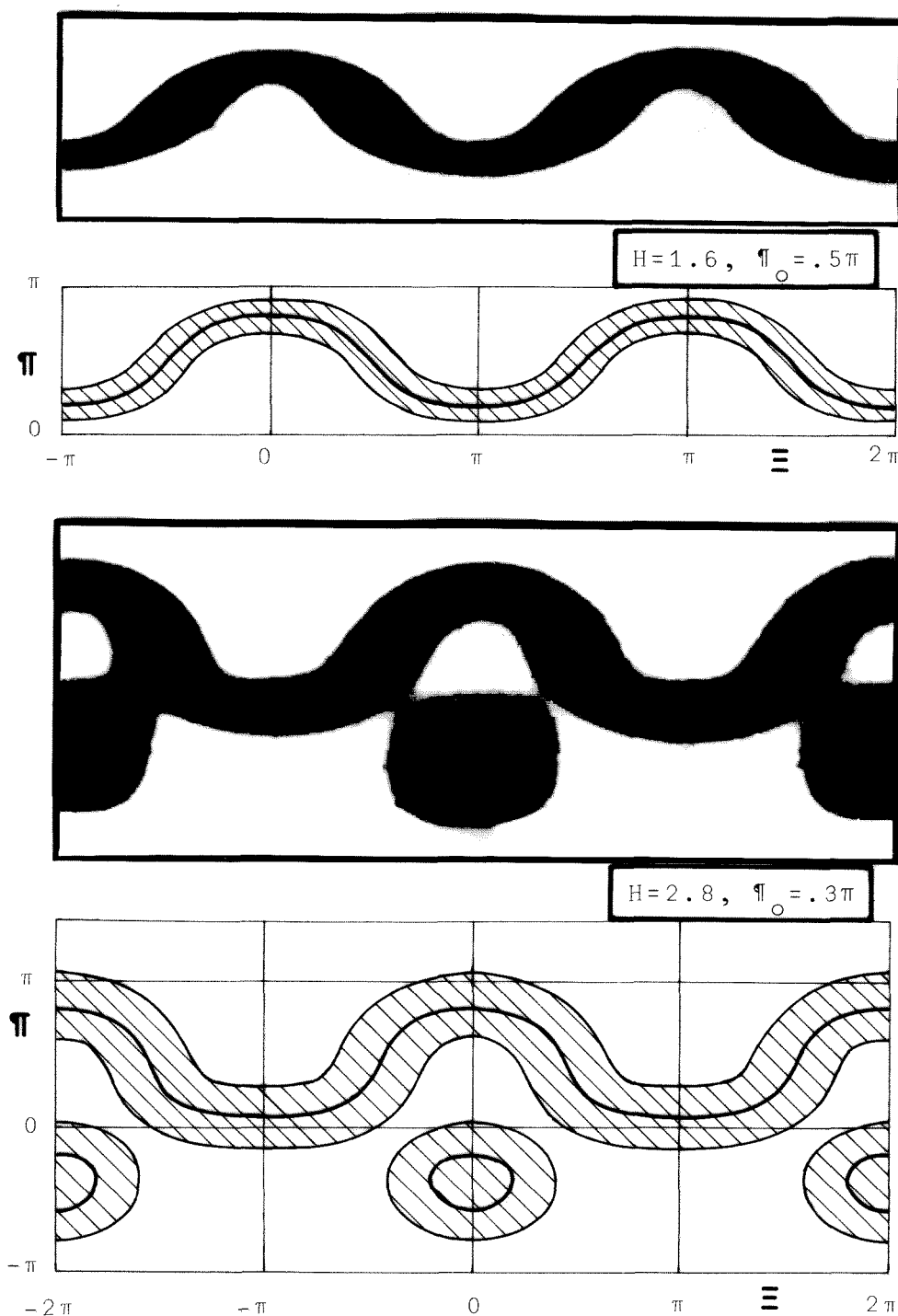


Fig. 16. Imágenes reales de una ranura luminosa reflejada sobre la superficie de un líquido sometido a vibración vertical. Debajo de cada imagen real se muestra su correspondiente imagen analítica calculada mediante la ecuación (46). (Continúa en la página siguiente).

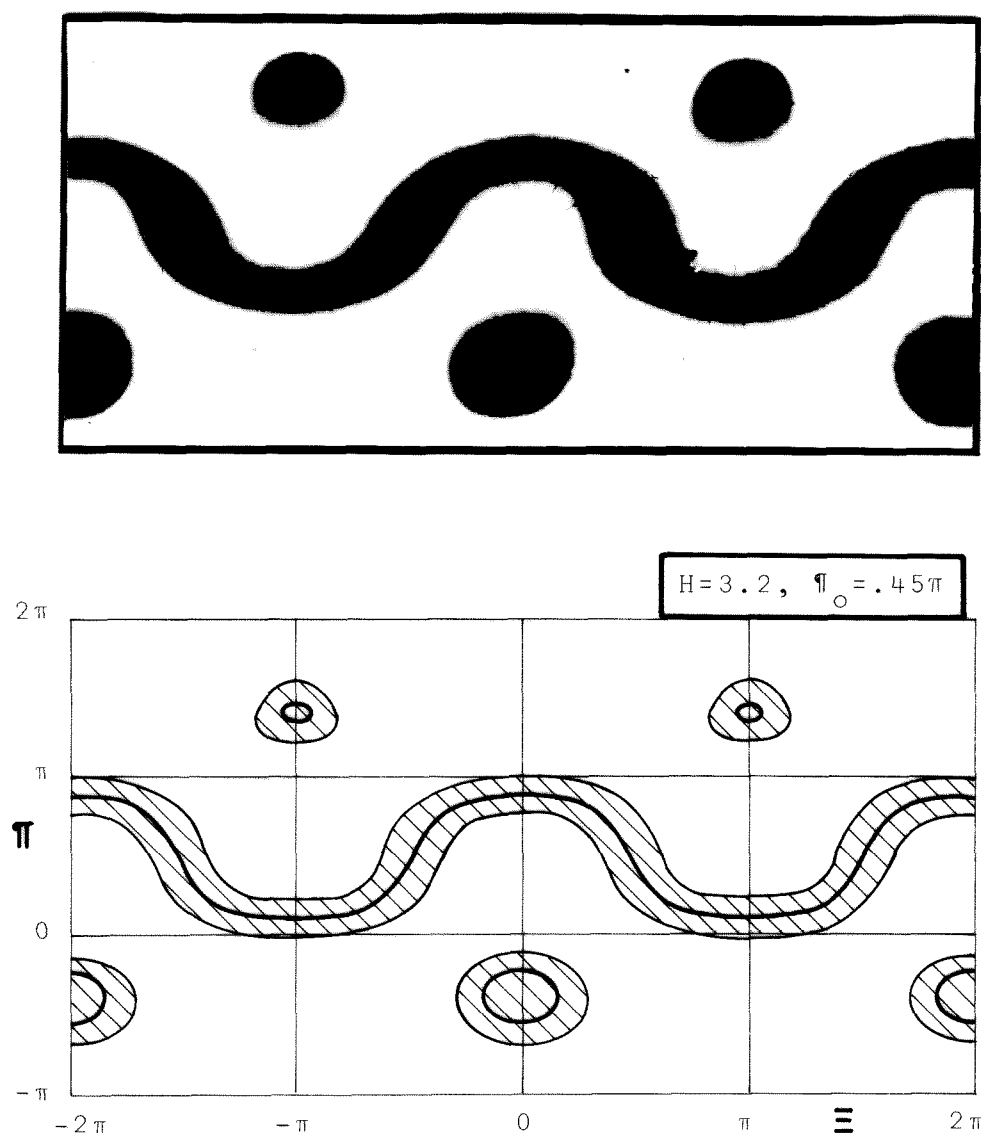


Fig. 16. (Continuación) Imágenes reales de una ranura luminosa reflejada sobre la superficie de un líquido sometido a vibración vertical. Debajo de cada imagen real se muestra su correspondiente imagen analítica calculada mediante la ecuación (46).

2.4. INSTALACION Y METODO DE TRABAJO

La instalación utilizada en los ensayos, como se esquematiza en la figura 17, consta básicamente de un vibrador sobre el que se monta el recipiente para el líquido, una fuente de iluminación estroboscópica, una pantalla opaca con ranuras y una cámara fotográfica (véase también la figura 18).

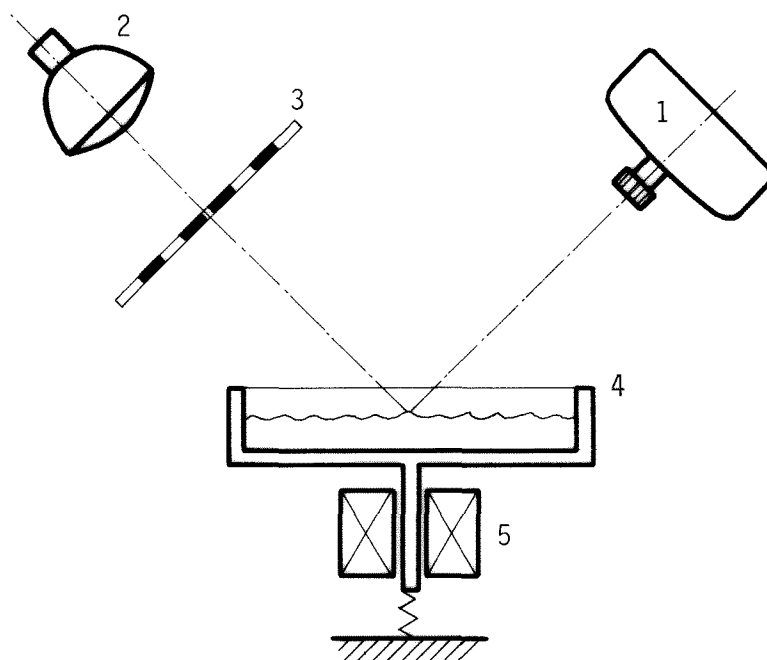


Fig. 17. Esquema de la instalación. 1: cámara fotográfica; 2: fuente de iluminación estroboscópica; 3: pantalla; 4: recipiente para el líquido; 5: vibrador.

En las series de experimentos realizados se ha utilizado un vibrador Ling Modelo 101, cuyas características se recogen en la Tabla 1, conectado a un amplificador Ling Modelo TP0 25. Sobre la parte móvil del vibrador se coloca un recipiente que contiene el líquido a ensayar; el recipiente es de forma en planta cuadrada y el fondo del mismo es de color oscuro para facilitar la visualización de las ondas. La cubeta está atravesada, a una altura aproximada de 1.4 cm sobre

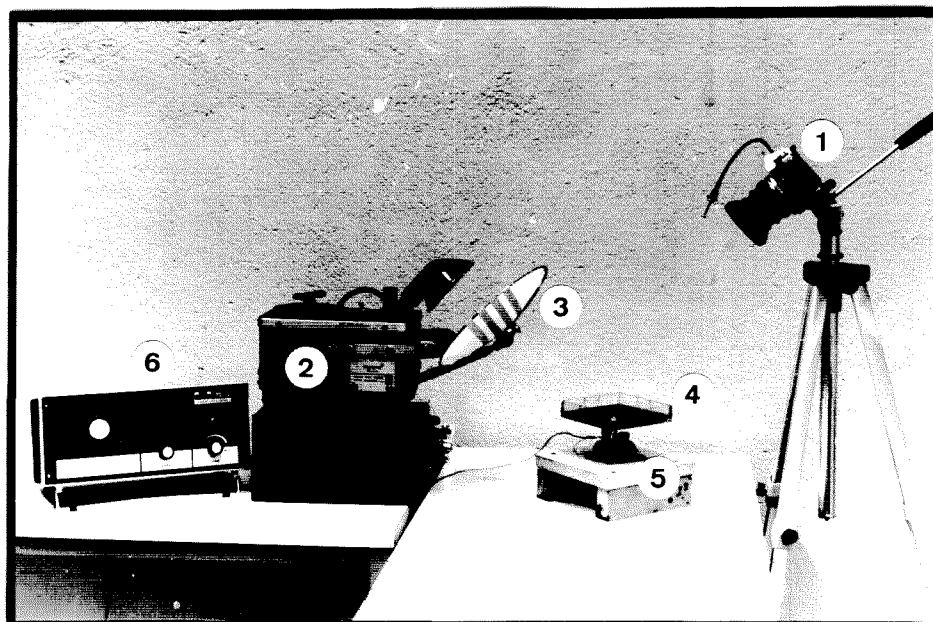


Fig. 18. Vista de la instalación. 6: amplificador, el resto de los rótulos tiene el mismo significado que en la figura 17.

Tabla 1

Características del vibrador Ling Modelo 101. [08]

Masa total908 kg
Masa del sistema móvil	6.5×10^{-3} kg
Empuje máximo (a 10^3 Hz)	8.9 N
Frecuencia máxima	12×10^3 Hz
Desplazamiento máximo	2.5×10^{-3} m
Potencia consumida	5-10 VA

el fondo del recipiente, por dos cables paralelos cuyo objeto es servir de marcas de referencia en la medida de la longitud de onda. En la figura 19 se indican las dimensiones del recipiente y la distancia entre cables.

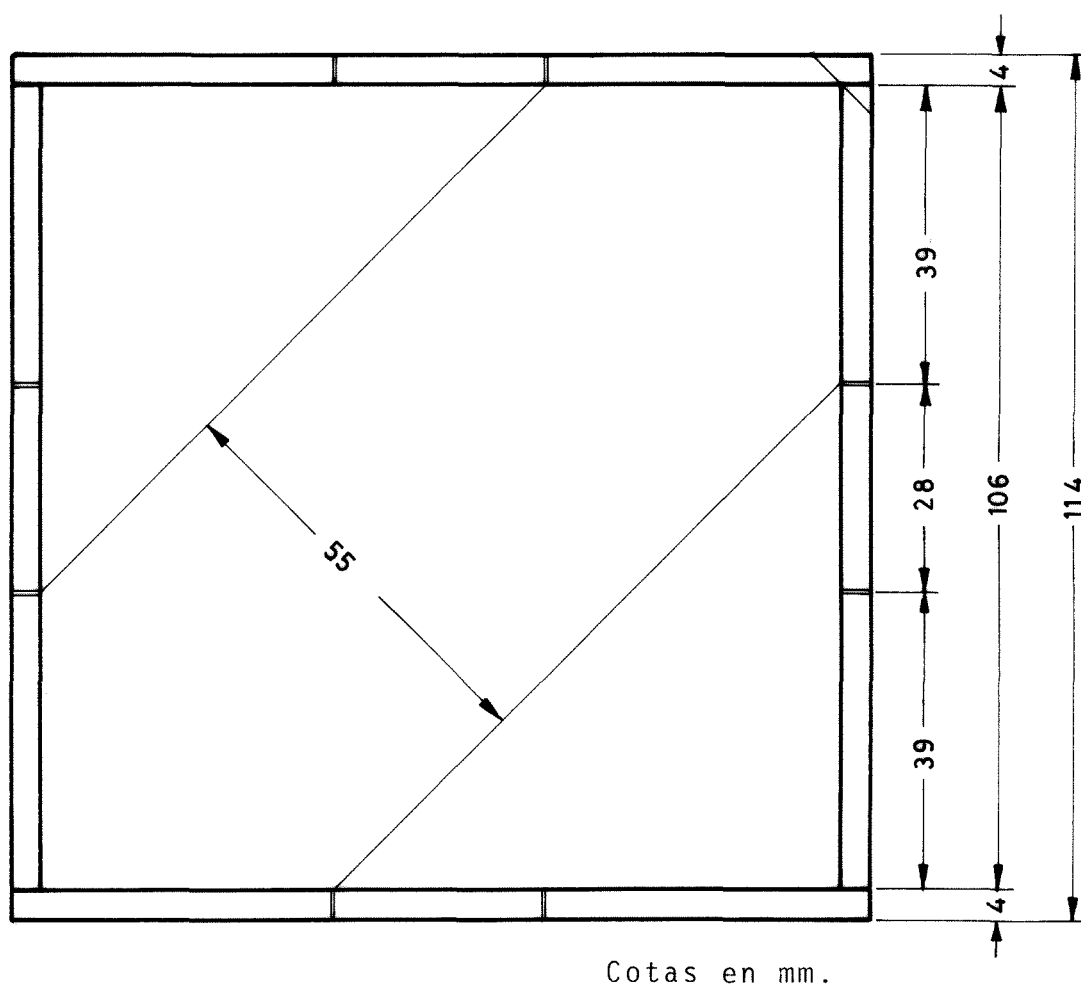


Fig. 19. Dimensiones de la forma en planta del recipiente.

En operación, una vez nivelado el recipiente de forma que el fondo esté horizontal, se vierte en la cubeta el líquido a ensayar hasta que la superficie libre del líquido queda próxima a los cables de referencia. La fuente de iluminación (un estroboscopio Strobotac Type 1531-A) y la cámara fotográfica se colocan uno a cada lado del recipiente alineada

dos con la diagonal de la cubeta paralela a los cables y entre la cubeta y el estroboscopio se dispone una pantalla opaca con ranuras. Estroboscopio, pantalla y cámara fotográfica se sitúan de manera que las imágenes de las ranuras sobre la superficie del líquido en reposo se formen paralelamente a la diagonal perpendicular a los cables de referencia.

Puesto en marcha el vibrador, se selecciona una frecuencia y se ajusta la amplitud de la vibración de modo que las ondas superficiales sean suficientemente visibles (selecccionar la amplitud adecuada es una labor especialmente críticca cuando el fluido es más viscoso que el agua -como la dimetil silicona- dado que si la amplitud de la excitación es pequena, las ondas son apenas visibles en el centro del recipiente y al aumentar la amplitud aparecen inestabilidades que dan lugar a una configuración no regular con ondas de gran amplitud. El margen de amplitudes aptas para la visualización aumenta cuanto menor es la viscosidad del líquido a ensayar). A continuación se ajusta el estroboscopio a la misma frecuencia que el vibrador, lo que permite tener una imagen "congelada" de las ondas capilares, y se fotografía la superficie del líquido (los ensayos se realizan en una cámarra oscura para evitar reflejos indeseados). El proceso se repite para una nueva frecuencia de excitación y así sucesivamente.

Nótese que aunque las fotografías muestran las imágenes de ondas aparentemente estáticas, lo que se registra en realidad en cada fotografía es la superposición de las imágenes correspondientes a un conjunto de ondas sucesivas (tana

tas como sea el producto de la frecuencia por el tiempo de exposición). Se puede obtener la imagen de una sola onda iluminando la superficie del líquido con un solo destello luminoso (flash) pero, si se utilizan pantallas para mejorar la visualización, la luz reflejada por la superficie es insuficiente para impresionar la película fotográfica; por esta razón se utilizó un estroboscopio para la iluminación. La nitidez de las fotografías obtenidas da, además, una idea de la estabilidad del fenómeno de las ondas capilares (el tiempo de exposición fue de 1 segundo en la mayoría de las fotografías realizadas).

La longitud de onda de la imagen, λ_i , se determina, en cada caso, dividiendo la distancia entre los cables por el número de ondas comprendidas entre éstos.

2.5. ANALISIS DE LOS RESULTADOS

Una vez obtenidas las fotografías de las ondas capilares en las diversas series de ensayos, el problema se centra en el análisis de la información contenida en las fotografías.

Indudablemente, el hecho de que para un mismo líquido (tensión superficial constante) se pueda repetir un experimento bajo distintas condiciones, permite mejorar la precisión en los resultados.

Los ensayos podrían haberse realizado manteniendo fija la frecuencia y tomando series de fotografías a esta frecuencia prefijada; la media de las longitudes de onda medidas en cada fotografía sería una estimación de la longitud

de onda real, lo que permitiría determinar el valor de la tensión superficial mediante la ecuación (32):

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \rho \lambda^3 f^2 \quad , \quad (48)$$

sin embargo, procediendo de este modo el valor de σ será muy sensible a los errores sistemáticos en las variables medidas y exige que los instrumentos de medida estén calibrados con gran fiabilidad.

Así pues, parece inconveniente mantener constantes cantidades que pueden ser medidas en diferentes situaciones, y así los ensayos, como se dijo anteriormente, se han realizado variando la frecuencia de excitación de unas fotografías a otras y midiendo el número de ondas, N , comprendidas entre los cables de referencia situados en el recipiente. Si es L la distancia entre los cables, la ecuación (48) para el caso $\alpha=45^\circ$ quedará:

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \rho \frac{L^3}{N^3} f^2 \quad , \quad (49)$$

ya que

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{L}{N} \quad . \quad (50)$$

Dado que el conjunto de puntos experimentales (f, N) no cumplen individualmente la expresión anterior (el valor obtenido de σ varía considerablemente de unos puntos a otros) el procedimiento a seguir es calcular, a partir de los datos experimentales, una estimación de la expresión analítica que relaciona N y f ; esta expresión deberá ser del tipo de la ecuación (49), es decir:

$$N^3 = a_n^2 f^2 \quad , \quad (51)$$

y conocido el valor de la constante a_n , determinar σ identificando términos análogos en la ecuación teórica (49) y en la experimental (51); en resumen, quedará:

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \frac{\rho L^3}{a_n^2} . \quad (52)$$

El ajuste de los datos experimentales se ha hecho mediante el método de los mínimos cuadrados buscando una ecuación (lineal en las constantes a determinar) de forma que la suma de los cuadrados de las desviaciones de los valores observados respecto a los calculados con la ecuación sea mínima. La justificación de este enunciado se encuentra en el teorema de Gauss-Markov, que establece que las estimaciones más precisas son las obtenidas mediante funciones lineales de las observaciones. La propiedad de linealidad ofrece grandes ventajas por su simplicidad, aunque pueden existir estimaciones no lineales de menor varianza. Sin embargo, cuando los errores aleatorios de las variables medidas tienen una distribución normal, se demuestra que las estimaciones lineales, por el método de mínimos cuadrados, son las de máxima probabilidad y mínima varianza [09].

La aplicación correcta del método presupone el cumplimiento de las siguientes hipótesis:

- 1) Se conoce la forma correcta de la ecuación.
- 2) Los datos experimentales son representativos de la situación que se pretende generalizar.
- 3) Los datos observados son estadísticamente independientes.
- 4) Las observaciones de la variable dependiente tien

nen la misma varianza.

5) Los valores de la variable independiente se conocen sin error (o los errores son mucho menores que los de la variable dependiente).

6) Los errores tienen una distribución normal.

En nuestro caso las hipótesis 2) y 3) evidentemente se cumplen, y la 4) se cumple con gran aproximación (el no cumplimiento de esta hipótesis obligaría a ponderar el peso de cada punto experimental). La 6) se asegura en cierta forma al considerar como valor representativo del número de ondas, N , la media de las estimaciones realizadas por distintos observadores, y en cuanto a la 5) el error absoluto dado por la escala del estroboscopio (que fue el equipo utilizado para la medida de la frecuencia) es de 1/6 Hz, lo que se ajusta a las condiciones señaladas.

Respecto a la forma correcta de la ecuación -hipótesis 1)- el análisis de los datos experimentales muestra un error sistemático en los valores de las frecuencias medidas de unos 4 Hz en unos ensayos y 7 Hz en otros (valores dentro del margen de calibración del estroboscopio). Esto supone que la ecuación debe ser del tipo

$$N^3 = a_n^2 (f - f_o)^2, \quad (53)$$

o bien, eligiendo $N^{3/2}$ como variable dependiente:

$$N^{3/2} = a_n (f - f_o) = a_n f + b_n, \quad (54)$$

que es lineal en los coeficientes.

Denotando por (x_i, y_i) a los pares $(f, N^{3/2})$, las expresiones que permiten determinar los valores de los coefi-

cientes a_n y b_n , la desviación típica de la variable dependiente, $S(y)$, y de los coeficientes, $S(a_n)$ y $S(b_n)$, son ([09], [10]):

$$a_n = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\mu} \quad , \quad (55)$$

$$b_n = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{\mu} \quad , \quad (56)$$

$$n^2 S^2(y) = n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2 - \mu a_n^2 \quad , \quad (57)$$

$$S(a_n) = nS(y) [(n-2)\mu]^{-1/2} \quad , \quad (58)$$

$$S(b_n) = S(a_n) \left(\frac{\sum x_i^2}{n} \right)^{1/2} \quad , \quad (59)$$

donde $\mu = n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$.

Los resultados experimentales que se muestran en las páginas siguientes se han obtenido en diferentes series de ensayos, según se indica en la Tabla 2. En la Tabla 3 se recogen los resultados obtenidos con Agua Desmineralizada y en las Tablas 4 y 5 los obtenidos con Agua tintada con Tinta China y Dimetil Silicona, respectivamente. Los valores calculados de a_n , b_n , $S(y)$, $S(a_n)$ y $S(b_n)$, para cada uno de los líquidos señalados, se muestran en la Tabla 6 y en las figuras 20, 21 y 22 se presentan, para cada líquido, las regtas obtenidas por el método de mínimos cuadrados junto con los valores experimentales.

Determinado a_n , el valor de σ se calcula utilizando la expresión (52) y el error en el valor de σ , calculado por este método, será:

TABLA 2
Condiciones de los Ensayos

Código del ensayo	1	2	3	4	5	6	7
Líquido	Agua Desmineralizada			Agua tintada con Tinta China al 1% en volumen		Dimetil Silicona	
Nombre comercial						47 V 20 (L-8300)	
Fabricante						Siliconas Hispania S.A.	
Temperatura ambiente [°C]	20	19	20	20	20	21	20
Densidad del líquido ¹ [kg.m ⁻³]	998 ± 1					954 ± 1	
Volumen del líquido [cm ³]	160			150		160	
Profundidad del líquido [cm]	1.25			1.15		1.25	
Intervalo de frecuencias de los ensayos [Hz]	25.3 121.0	59.0 129.0	25.5 49.7	18.7 109.3	27.3 116.7	9.5 30.3	9.7 24.4
Número de tomas fotográficas útiles	25	15	6	9	11	15	6
Pantalla utilizada	Tipo A ²			Tipo B ³		Tipo A ²	

1
Medidas con un areómetro Silberbrand en este Laboratorio. Los valores de la densidad son practicamente constantes en los intervalos de temperatura considerados.

2
Tipo A: pantalla de papel poliester translúcido con una banda opaca de 3,7 cm de anchura y una ranura central de 1 mm.

3
Tipo B: pantalla de papel poliester translúcido con 4 bandas opacas de 1 cm de anchura separadas 1 cm.

Tabla 3

Resultados de los Ensayos. Líquido: Agua Desmineralizada

f [Hz]	N	N ^{3/2}	¹ e	f [Hz]	N	N ^{3/2}	¹ e	f [Hz]	N	N ^{3/2}	¹ e
25.3	4.1	8.30	1	53.7	7.5	20.54	1	91.3	10.4	33.54	2
25.5	4.0	8.00	3	59.0	7.7	21.37	2	93.3	11.0	36.48	2
31.6	4.7	10.19	3	60.7	8.1	23.05	1	95.3	11.2	37.48	1
32.0	5.0	11.18	1	60.7	8.5	24.78	1	96.3	11.1	36.98	2
37.3	5.5	12.90	1	65.7	8.0	22.63	2	106.0	11.9	41.05	1
37.3	5.7	13.61	1	66.0	8.6	25.22	1	107.0	12.0	41.57	2
38.0	5.3	12.20	3	66.7	8.9	26.55	1	110.3	12.0	41.57	2
38.2	5.8	13.97	1	71.7	9.0	27.00	1	110.7	12.2	42.61	1
40.2	5.9	14.33	3	71.7	9.3	28.36	1	113.7	12.5	44.19	1
43.3	6.3	15.81	1	72.0	8.9	26.55	2	116.0	12.5	44.19	2
43.7	6.2	15.44	3	76.0	9.0	27.00	2	118.0	12.7	45.26	1
44.0	6.5	16.57	1	77.3	9.6	29.74	1	119.0	12.4	43.66	2
48.8	7.0	18.52	1	80.7	9.6	29.74	2	121.0	13.2	47.06	1
49.5	7.0	18.52	1	83.8	10.3	33.06	1	129.0	13.0	46.78	2
49.7	6.7	17.34	3	85.7	9.8	30.68	2				
53.3	7.5	20.54	1	87.3	9.9	31.15	2				

¹
Los números en esta columna indican el código del ensayo (véase
Tabla 2).

Tabla 4

Resultados de los ensayos. Líquido: Agua tintada con Tinta China

f [Hz]	N	$N^{3/2}$	e^1	f [Hz]	N	$N^{3/2}$	e^1	f [Hz]	N	$N^{3/2}$	e^1
18.7	3.3	5.99	4	61.0	7.8	21.78	5	92	10.8	35.49	5
27.0	4.2	8.61	4	64.7	8.5	24.78	4	97.3	11.9	41.05	4
27.3	4.2	8.61	5	66.0	8.3	23.91	5	102.7	12.0	41.57	5
40.5	5.5	12.90	4	77.7	9.7	30.21	4	103.0	12.0	41.57	5
41.6	6.0	14.70	5	78.7	9.8	30.68	5	109.3	12.7	45.26	4
52.0	7.5	20.54	4	90.7	10.7	35.00	4	116.7	12.5	44.19	5
54.0	7.2	19.32	5	91.3	11.0	36.48	5				

¹
Los números en esta columna indican el código del ensayo (véase Tabla 2).

Tabla 5

Resultados de los ensayos. Líquido: Dimetil Silicona

f [Hz]	N	$N^{2/3}$	e^1	f [Hz]	N	$N^{3/2}$	e^1	f [Hz]	N	$N^{2/3}$	e^1
9.5	1.4	1.66	6	15.0	2.8	4.69	6	22.3	4.4	9.23	6
9.7	1.5	1.84	7	15.2	2.8	4.69	7	24.0	4.7	10.19	6
10.4	1.6	2.02	6	16.7	3.2	5.72	6	24.4	4.9	10.85	7
11.4	1.9	2.62	7	18.0	3.5	6.55	6	25.0	5.3	12.20	6
11.8	1.9	2.62	7	18.3	3.6	6.83	6	26.3	5.1	11.52	6
12.3	2.2	3.26	6	20.0	3.9	7.70	6	26.7	5.4	12.55	6
13.4	2.4	3.72	7	21.7	4.2	8.61	6	30.3	5.9	14.33	6

¹
Los números en esta columna indican el código del ensayo (véase Tabla 2).

Tabla 6
Resultados finales de los ensayos

	Agua Desmineralizada	Agua tintada con Tinta China	Dimetil Silicona
Pendiente de la recta ¹ , a_n	.394	.428	.626
Ordenada en el origen ¹ , b_n	- 1.344	-3.115	-4.575
Abcisa en el origen ² , f_o [Hz]	3.41	7.28	7.31
Desviaciones típicas			
$S(N^{3/2})$	1.0674	1.1514	.3320
$S(a_n)$.0055	.0094	.0123
$S(b_n)$.4232	.7145	.2359
Tensión Superficial ³ $\sigma \times 10^3$ [N.m ⁻¹]	60.2 \pm 2.7	51.0 \pm 3.1	22.8 \pm 1.3
$\Delta\sigma/\sigma$.045	.061	.057

¹ Los datos experimentales se han ajustado por el método de mínimos cuadrados a una recta de ecuación:

$$N^{3/2} = a_n (f-f_o) = a_n f + b_n \quad .$$

² $f_o = - \frac{b_n}{a_n}$ mide el error sistemático cometido en las medidas de las frecuencias.

³ $\sigma = \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \frac{\rho L^3}{a_n^2}$, $\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\Delta\rho}{\rho} + 3 \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{S(a_n)}{a_n}$,

donde $S(a_n)$ y a_n son los valores correspondientes dados en la Tabla, $\Delta L = .3 \times 10^{-3}$ m, $L = 55 \times 10^{-3}$ m y los valores de ρ y $\Delta\rho$ se indican, para cada líquido, en la Tabla 2.

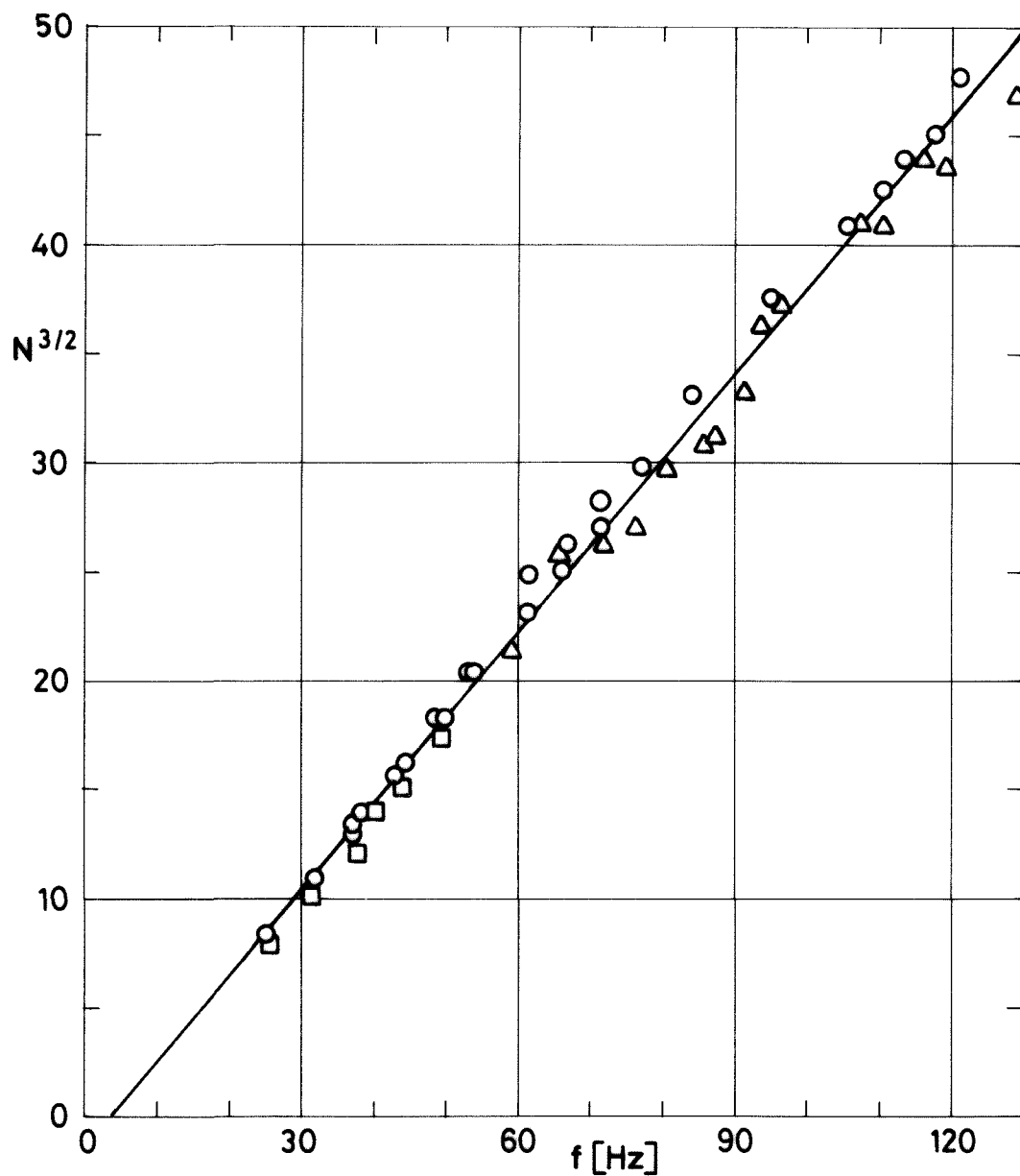


Fig. 20. Resultados de los ensayos y recta de mínimos cuadrados. Líquido: Agua Desmineralizada.
Los símbolos indican el código del ensayo (véanse las Tablas 2 y 3) según la siguiente clave:

- Ensayo 1
- △ Ensayo 2
- Ensayo 3

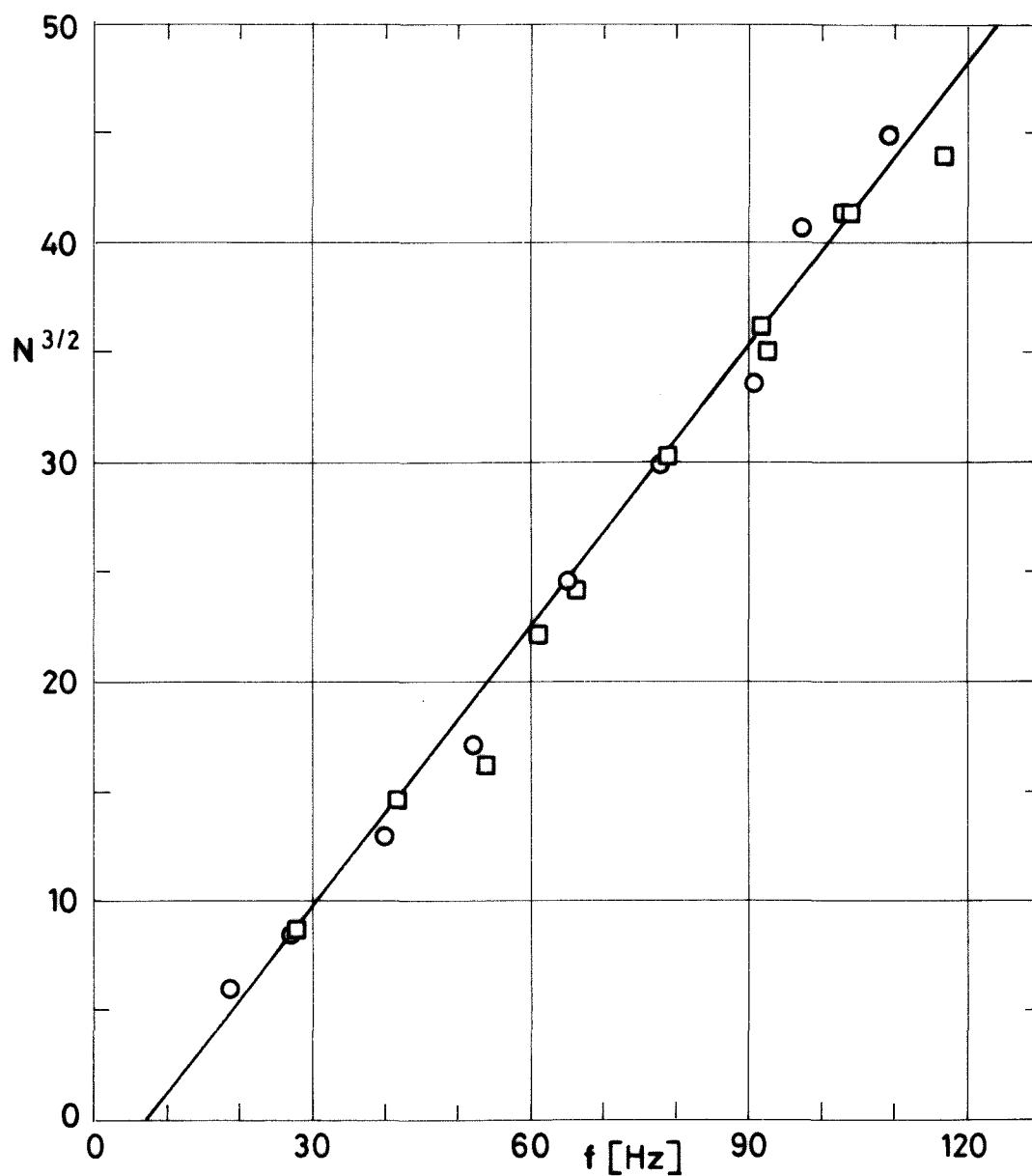


Fig. 21. Resultados de los ensayos y recta de mínimos cuadrados. Líquido: Agua tintada con Tinta China. Los símbolos indican el código del ensayo (véanse las Tablas 2 y 4) según la siguiente clave:

○ Ensayo 4

□ Ensayo 5

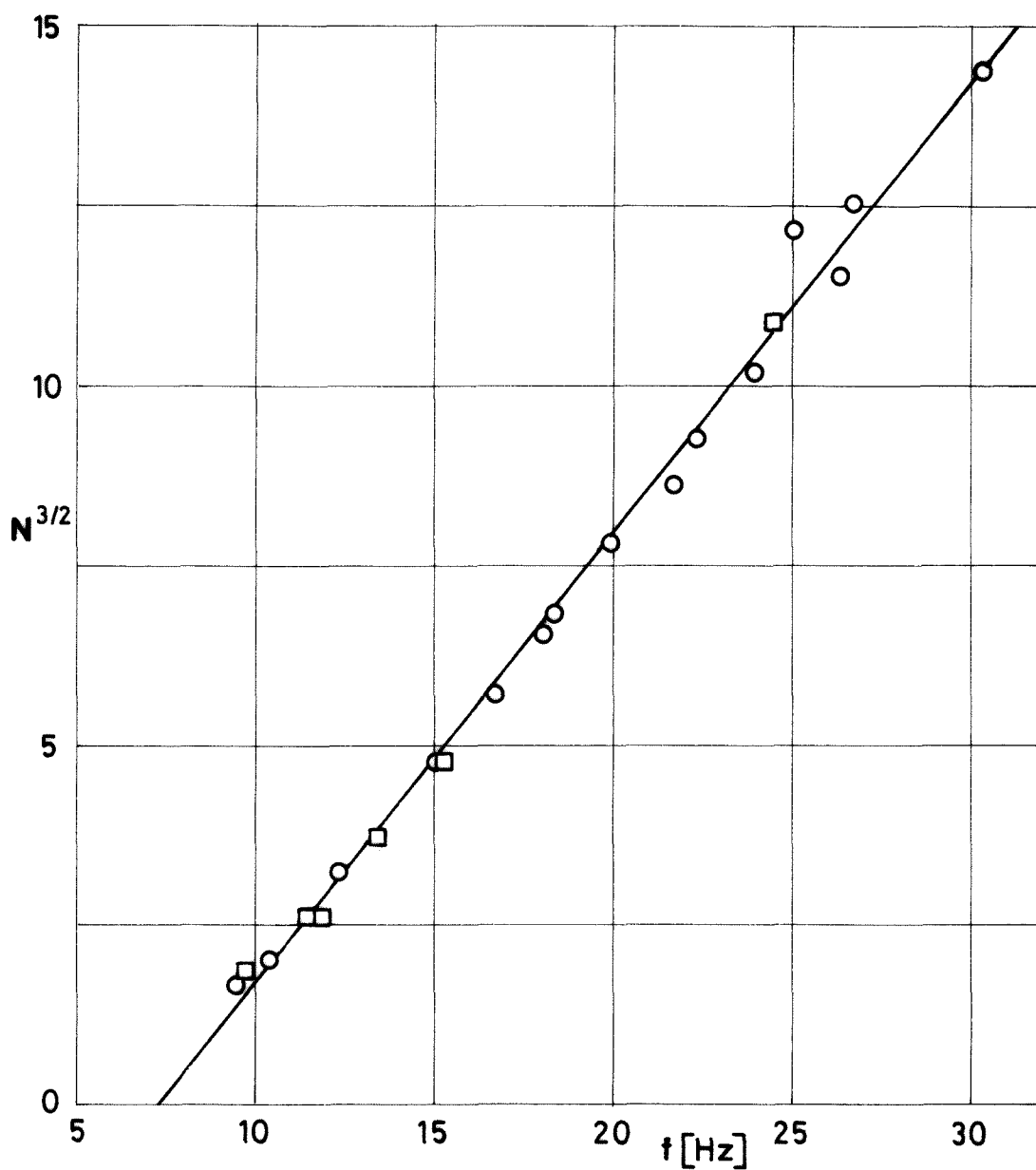


Fig. 22. Resultados de los ensayos y recta de mínimos cuadrados. Líquido: Dimetil Silicona.
Los símbolos indican el código del ensayo (véanse las Tablas 2 y 5) según la siguiente clave:

- Ensayo 6
- Ensayo 7

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\Delta\rho}{\rho} + 3 \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta a_n}{a_n} \quad . \quad (60)$$

De los tres sumandos que intervienen en esta expresión, el primero, $\Delta\rho/\rho$, es del orden de 10^{-3} y despreciable frente a los otros dos (véase la Tabla 2). En el segundo, ΔL es, a lo sumo, del orden del espesor de los cables: $.3 \times 10^{-3}$ m; teniendo en cuenta que la distancia L entre los cables es 55×10^{-3} m, resulta:

$$3 \frac{\Delta L}{L} = 3 \frac{.3 \times 10^{-3}}{55 \times 10^{-3}} = .016 \quad , \quad (61)$$

y el tercer término se puede evaluar a partir de los resultados obtenidos:

$$2 \frac{\Delta a_n}{a_n} = 2 \frac{S(a_n)}{a_n} \quad . \quad (62)$$

Los resultados finales se muestran en la Tabla 6. Los valores de la tensión superficial presentados en esta Tabla se han calculado bajo la hipótesis de que los únicos parámetros experimentales sujetos a error son los considerados en la expresión (60). En el apartado siguiente se discute la validez de esta hipótesis. En particular la influencia en los resultados del ángulo α (ángulo que forma la línea base con uno de los lados del recipiente).

2.6. CONCLUSIONES

A la vista de los resultados obtenidos son posibles dos tipos de consideraciones, relacionadas unas con los valores numéricos finales y otras con el método seguido para la obtención de dichos valores.

Entre las primeras, la más importante es que los resultados finales no permiten juzgar plenamente la fiabilidad del método seguido para determinar el valor de la tensión superficial de los líquidos ensayados. En efecto, el valor calculado para la Dimetil Silicona (47 V 20 (L-8300), según nomenclatura del fabricante) es un 11% superior al valor dado por el fabricante: $22.8 \times 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$ a 20°C frente a $20.6 \times 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$ a 25°C [11], valor este último muy parecido a los suministrados por otros fabricantes (entre $20 \times 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$ y $21 \times 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$, a 25°C , para las siliconas fabricadas por Dow Corning [12]). Esta discrepancia no es asignable a la diferencia existente entre las temperaturas a las que están dados los valores de σ , ya que el coeficiente de variación de la tensión superficial con la temperatura ($-d\sigma/dT$) es del orden de $10^{-8} \text{ N.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ para las siliconas comerciales ($10^{-4} \text{ N.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ para el agua) y probablemente se debe, como se explica posteriormente, a un error cometido durante la realización de los ensayos.

Los valores obtenidos para el agua y el agua tinta no permiten la comparación con otros métodos experimentales, pues la tensión superficial del agua varía notablemente por la presencia de contaminantes en el líquido; por ejemplo, en la figura 23 se muestra la variación con el tiempo de la tensión superficial de una solución acuosa de bromuro de cetil-piridina al .003%, el valor de σ para esta solución se estabilizó alrededor de $36 \times 10^{-3} \text{ N.m}^{-3}$ al cabo de 20.5 h [04]. En los ensayos se utilizaron agua desmineralizada y agua tintada con Tinta China. Los resultados obtenidos indican que

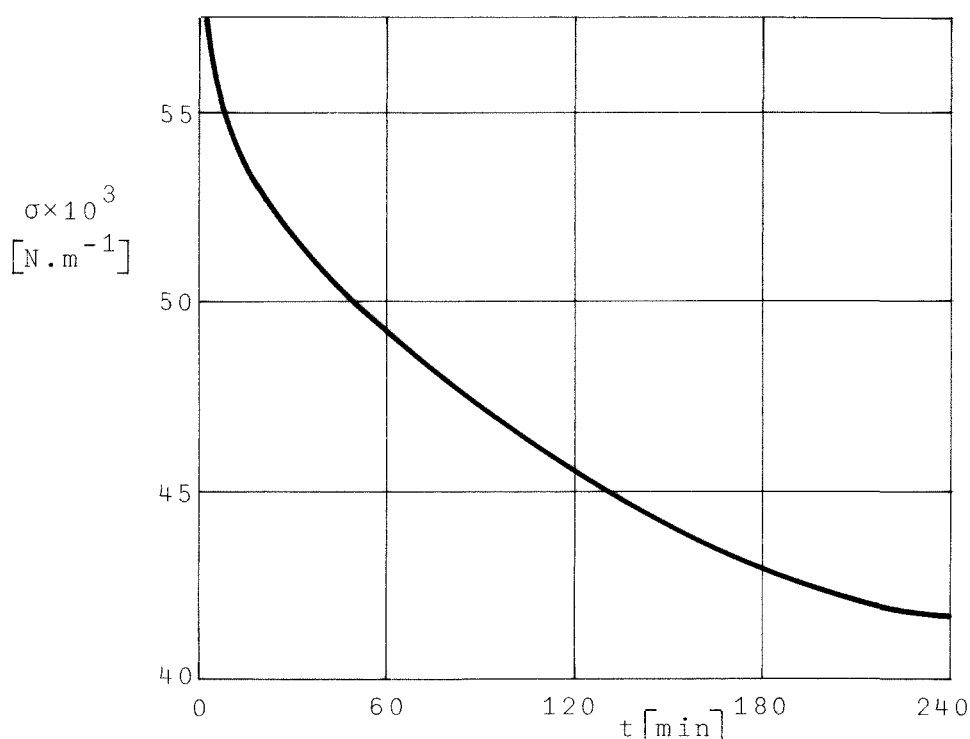


Fig. 23. Variación de la tensión superficial con el tiempo de una solución acuosa de bromuro de cetil-piridina al .003% [04].

la tensión superficial disminuye cuando se añade Tinta China y éste fue el único contaminante controlado. Dado que la adición al agua de pequeñas cantidades de otras sustancias puede originar cambios de hasta el 50% en el valor de la tensión superficial, los resultados que se puedan obtener utilizando agua como líquido de ensayo no son útiles para la comparación de diversos métodos a menos que se controle minuciosamente la composición del agua ensayada.

Respecto al método, la idea primaria que determinó su desarrollo fue comprobar si es posible determinar la tensión superficial de un líquido con equipo no especialmente diseñado o adaptado para este fin. Evidentemente el punto débil de cualquier método basado en el fenómeno de las ondas capilares es la medición de la longitud de onda con la preci

sión adecuada (recuérdese que según la expresión (32) el error al determinar el valor de σ es, al menos, la suma del doble del error cometido al estimar la frecuencia más tres veces el error cometido al medir la longitud de onda). Desde este punto de vista, el método seguido ofrece resultados satisfactorios, ya que permite calcular el valor de la relación N^3/f^2 con un error próximo al 3% y este valor se puede hacer aún más pequeño modificando levemente el proceso de medición del número de ondas entre las marcas del recipiente. De igual forma el error asociado a la distancia entre los cables de referencia, $3\Delta L/L$, actualmente estimado en un 1.6%, se puede disminuir hasta un .8%, manteniendo la distancia L actual, diseñando un nuevo recipiente de mayor precisión.

No se ha discutido aún la importancia en los resultados del ángulo α formado por la línea base con uno de los lados de referencia. En los cálculos hechos se ha supuesto $\alpha=45^\circ$; sin embargo, dado que $\lambda=\lambda_1/(m\cos\alpha)$, un error de 1° ó 2° alrededor del valor supuesto para α supone que el valor de σ varíe entre un 5 y un 10%. El análisis de las fotografías obtenidas muestra que posiblemente éste haya sido el caso para la Dimetil Silicona; lamentablemente el campo fotografiado no permite determinar con exactitud el valor α (en las fotografías sólo aparece una parte del recipiente) por lo que en los cálculos se ha tomado el valor nominal $\alpha=45^\circ$. Obviamente esta ambigüedad en el valor de α aumenta el error del valor calculado de σ (en los porcentajes señalados anteriormente) y formalmente los resultados de la Tabla 6 deberían estar dados con errores del 10% aproximadamente.

REFERENCIAS

1. Levich, V.G., "Physicochemical Hydrodynamics", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., USA, 1962, Chap. XI.
2. Rayleigh, Lord, "The Theory of Sound II", Dover Publications, New York, 1945, pp. 343-349.
3. Lamb, H., "Hydrodynamics", Dover Publications, New York, 1945, Chap. IX.
4. Brown, R.C., "The Ripple Method of Measuring Surface Tension", Proc. Phys. Soc., Vol. 48, 1935, pp. 312-322.
5. Brown, R.C., "A Method of Measuring the Amplitude and Damping of Ripples", Proc. Phys. Soc., Vol. 48, 1935, pp. 323-328.
6. Morse, P.M., & Feshbach, H., "Methods of Theoretical Physics", McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1953, pp. 555-567.
7. Abramowitz, M., & Stegun, I., "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications, Inc., New York, 1965, pp. 721-750.
8. LDS, "Instruction Manual. Vibrator Model 100 Series", Ling Dynamic Systems Ltd., Baldock Road, Royston, Hertfordshire, England, 1975
9. Daniel, C., & Wood, F.S., "Fitting Equations to Data", Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1971.

10. Barford, N.C., "Experimental Measurements: Precision, Error and Truth", Addison-Wesley Publishing Co., Inc., London, 1967.
11. SILICONAS HISPANIA, S.A., Comunicación privada.
12. DOW CORNING, "Information about Silicone Fluid Products", Bulletin 05-061, Dow Corning, Midland, Michigan 48641, USA, 1963.

3. PROGRAMAS DE SIMULACION

3. PROGRAMAS DE SIMULACION

3.1. INTRODUCCION

Uno de los problemas cruciales en la simulación electrónica en pantalla del comportamiento de las zonas líquidas flotantes es la velocidad de cálculo, la cual distingue los simples problemas de cálculo numérico de los problemas de simulación propiamente dicha. La simulación no es meramente la presentación de gráficos en pantalla; donde la simulación electrónica cobra excepcional importancia es en la animación de los procesos de llenado, separación y rotura de las zonas flotantes, lo cual requiere una cierta velocidad de renovación de imágenes en pantalla.

La precisión requerida en la simulación es función del uso que de ella se vaya a hacer: no es lo mismo dar una descripción rápida y atractiva de introducción al tema en conferencias de divulgación, que procurar una adecuada instrucción a los operadores del Spacelab, o que utilizar la simulación como elemento primario de investigación de movimientos complejos (inyección, convección libre y forzada, etc.) basándose en modelos matemáticos tentativos.

En el caso de las formas de equilibrio de las zonas líquidas se dispone de la solución exacta en el caso cuasiestático, pero desgraciadamente se trata de una solución implícita en función de integrales elípticas de primera y segunda especie. El problema del cálculo de estas funciones y la iteración para acoplarse a los datos de partida es complejo, y el tiempo requerido de ordenador impide, de momento, el cómputo completo de las soluciones exactas, por lo

que parece oportuno dividir el rango de variación de los parámetros en regiones de comportamiento sencillo que pueda ser aproximado por otros procedimientos más expeditivos.

En cualquier caso, será necesario disponer de la solución exacta para estimar el nivel de aproximación aceptable.

Con este motivo, se ha empezado haciendo un estudio detallado del cómputo de las integrales elípticas, problema básico que sirve de comparación y comprobación de las posibilidades del sistema disponible.

3.2. INTEGRACION PASO A PASO DE LAS INTEGRALES ELIPTICAS

El planteamiento en este caso es directo; las funciones F y E

$$F(\phi, \alpha) = \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \phi}}, \quad E(\phi, \alpha) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \phi} d\phi \quad (1)$$

se evalúan aplicando la conocida regla de Simpson a las respectivas cuadraturas, según se indica en la Fig. 1, de acuerdo con la fórmula siguiente:

$$\int_{\phi}^{\phi + \Delta\phi} f(\phi) d\phi = \frac{\Delta\phi}{6} \left[f(\phi) + 4f(\phi + \Delta\phi) + f(\phi + 2\Delta\phi) \right] + O(\Delta^5 \phi), \quad (2)$$

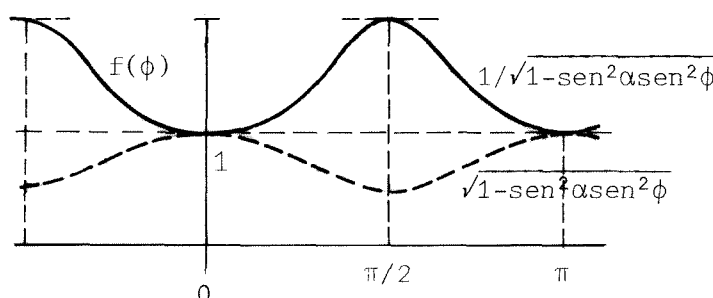


Fig. 1. Ilustración de la regla de Simpson para el caso de las integrales elípticas.

Los datos son los valores de ϕ y α , y los resultados los valores de F y E. El único caso especial es el que corresponde a $\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\phi}=0$, en que la función F presenta un polo.

La subrutina que se ha preparado tiene el organigrama que se representa en la Fig. 2, donde se ha seguido la regla general de procurar una línea de proceso rápido con el mínimo de cálculo, que será la línea más usada; de ella se derivan los casos menos frecuentes, como el hecho de que los argumentos estén fuera del primer cuadrante. Los bloques que componen el programa son los siguientes:

- Initializing: cambia la entrada de grados a radianes, calcula el cuadrante de círculo en que está ϕ , define la función integrando $f(\theta)$, introduce los valores iniciales de las variables y fija el valor del intervalo de integración.

- Simpson: va evaluando de forma incremental el área de las funciones representadas en la Fig. 1, con un intervalo constante salvo en las proximidades del valor final, en que el intervalo se ajusta automáticamente.

- Reducing: si $\phi \geq \pi/2$, calcula el valor reducido de ϕ y de α (como se explica en el apartado 3.4).

- Error: si $\phi \geq \pi/2$ y el valor reducido de α es $\alpha = \pi/2$ satura los contadores de F y E (pone el valor 888888) para indicar que no es válido.

- Complete: si $\phi \geq \pi/2$, es necesario calcular las integrales elípticas completas además de las incompletas relativas al argumento reducido, lo cual se efectúa consecutiva-

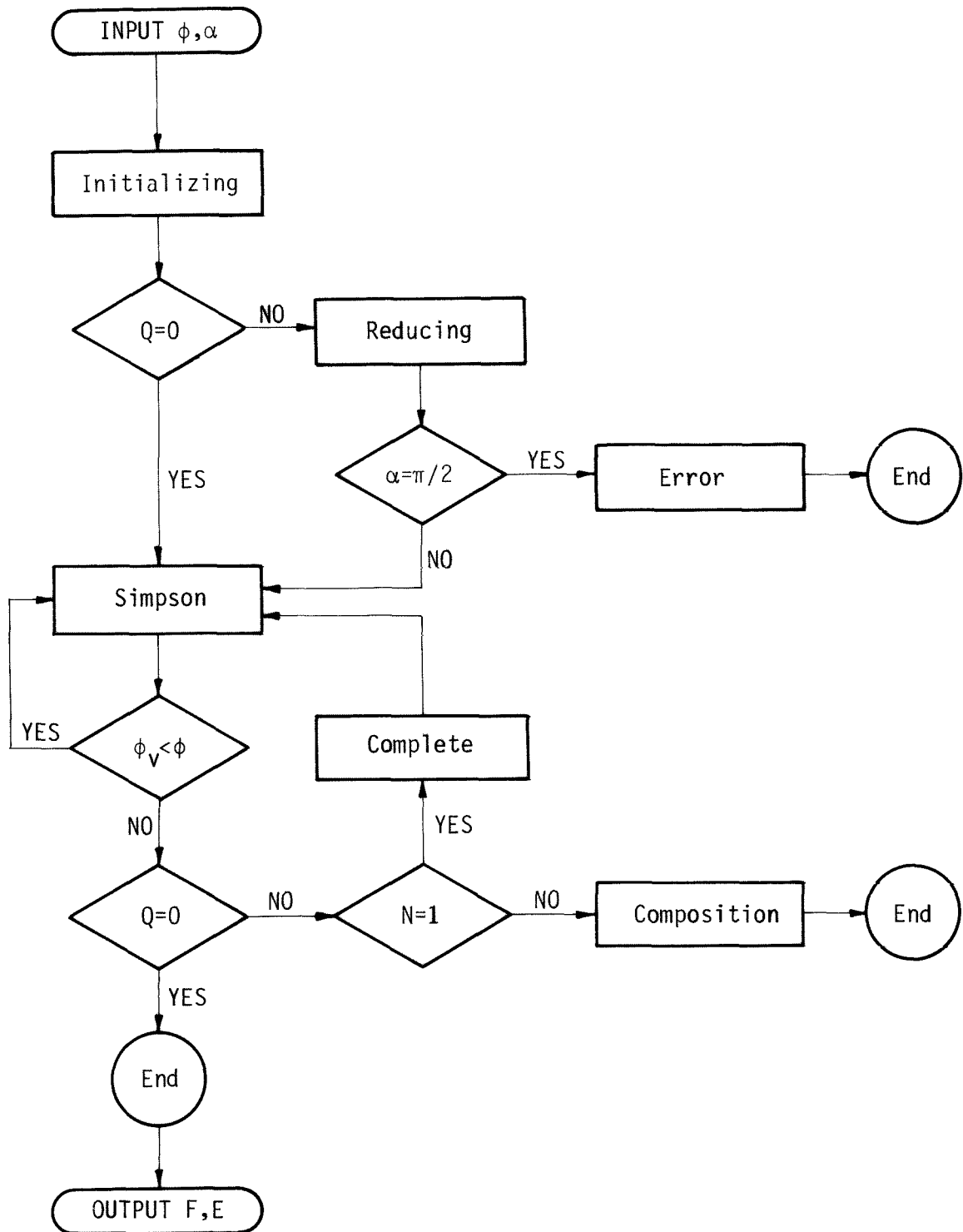


Fig. 2. Organigrama de cálculo de las integrales elípticas de primera y segunda especie mediante la regla de Simpson.

mente, integrando hasta el ϕ reducido, guardando los valores de F y E, y prosiguiendo la integración hasta $\phi=\pi/2$.

- Composition: si $\phi \geq \pi/2$, compone el valor final de F y E a partir de los valores de F y E correspondientes a $\phi=\pi/2$ y $\phi=\phi$ reducido.

El listado del subprograma en lenguaje HP-Basic se presenta en la Tabla 1.

3.3. DESARROLLO EN SERIE DE LAS INTEGRALES ELIPTICAS

Otro método que puede emplearse para calcular las integrales elípticas es el del desarrollo en serie de dichas integrales.

En el caso de la integral de primera especie, se obtiene:

$$F(\phi, \alpha) = \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \phi}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \text{sen}^{2m} \alpha \int_0^{\phi} \text{sen}^{2m} \phi d\phi \quad (3)$$

y en la de segunda especie

$$E(\phi, \alpha) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \phi} d\phi = \phi - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-3)!!}{(2m)!!} \text{sen}^{2m} \alpha \int_0^{\phi} \text{sen}^{2m} \phi d\phi \quad (4)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} (2m-1)!! &= \prod_{i=1}^m (2i-1) \\ (2m)!! &= \prod_{i=1}^m (2i) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

A su vez las integrales que aparecen en los desarrollos (3) y (4) pueden calcularse mediante la expresión:

$$\int \text{sen}^{2m} \phi d\phi = \frac{2m-1}{2m} \int \text{sen}^{2m-2} \phi d\phi - \frac{\text{sen}^{2m-1} \phi \cos \phi}{2m}, \quad (6)$$

TABLA 1. CALCULO DE LAS INTEGRALES ELIPTICAS DE PRIMERA Y SEGUNDA ESPECIE MEDIANTE LA REGLA DE SIMPSON.

```

10      ! ***** ELL-SR *****
20      !
30      ! ELLIPTIC INTEGRALS BY SIMPSON RULE
40      SUB Ell(Phi,Alpha,F,E)                                !INPUT IN DEGREES
50      Initializing: !
60      Phi=Phi*PI/180
70      Alpha=Alpha*PI/180
80      RAD
90      Q=INT(Phi/PI*2)
100     K=SIN(Alpha)
110     K2=K*K
120     DEF FNR(Phi)=SQR(1-K2*SIN(Phi)^2)
130     Phiv=F=E=0
140     Interval=.01                                          !INTERVAL=1 DEGREE
150     IF Q=0 THEN Simpson
160     Reducing: !
170     Q2=INT((Phi+PI/2)/PI)
180     Phi=ABS(Q2*PI-Phi)
190     Alpha=ABS(PI*INT((Alpha+PI/2)/PI)-Alpha)
200     N=1
210     IF Alpha=PI/2 THEN Error
220     Simpson: !
230     D0=FNR(Phiv)
240     Phiv=Phiv+Interval
250     D1=FNR(Phiv)
260     Phiv=Phiv+Interval
270     D2=FNR(Phiv)
280     F=F+Interval*(1/D0+4/D1+1/D2)/3
290     E=E+Interval*(D0+4*D1+D2)/3
300     IF Phiv>Phi-2*Interval THEN Interval=(Phi-Phiv)/2
310     IF Phiv<Phi THEN Simpson
320     IF Q=0 THEN End
330     IF N=1 THEN Complete
340     Composition: !
350     F=2*Q2*F+(-1)^Q*F1
360     E=2*Q2*E+(-1)^Q*E1
370     GOTO End
380     Complete: !
390     F1=F
400     E1=E
410     Phi=PI/2
420     N=2
430     Interval=.01
440     GOTO Simpson
450     Error: !
460     F=E=888888
470     End: !
480     SUBEND

```


en función de la integral de orden inferior. Esto sugiere la idea de utilizar para el cálculo un proceso iterativo. Así, si I_m, J_m, K_m se definen como

$$I_m = I_{m-1} \left(1 - \frac{1}{2m}\right) - \frac{\cos \phi}{2m} \sin^{2m-1} \phi \quad (7)$$

$$\text{Initializing } J_m = J_{m-1} \left(1 - \frac{1}{2m}\right) \quad (8)$$

$$K_m = K_{m-1} \left(1 - \frac{3}{2m}\right) \quad (9)$$

con valores iniciales

$$I_0 = \phi, \quad J_0 = 1, \quad K_0 = -1 \quad (10)$$

las integrales elípticas pueden escribirse:

$$\text{Series } F_m = F_{m-1} + J_m I_m \sin^{2m} \alpha \quad (11)$$

$$E_m = E_{m-1} + K_m I_m \sin^{2m} \alpha \quad (12)$$

tomando como valores iniciales F_0 y E_0

$$F_0 = \phi, \quad E_0 = \phi \quad (13)$$

Las fórmulas anteriores, (7) a (13), pueden emplearse directamente para el cálculo de las integrales elípticas.

Como puede deducirse del desarrollo, a medida que α se aproxima a $\pi/2$, aumenta el número de términos que es necesario calcular para obtener la precisión necesaria.

La subrutina que se ha diseñado para el cálculo tiene el organograma que se presenta en la Fig. 3, donde se ha mantenido el criterio de control de secuencia expuesto en el apartado anterior. El cálculo de las integrales elípticas de primera y segunda especie mediante desarrollo en series.

Los bloques que componen el programa son los si-

guientes:

- Initializing: cambia la entrada de grados a radianes, calcula el cuadrante de círculo en que está ϕ y las variables cuyos valores permanecen constantes a lo largo del cálculo.

- Series: calcula los valores iniciales de las variables y mediante un bucle realiza las iteraciones necesarias para calcular las integrales con la precisión requerida.

- Reducing: si $\phi \geq \pi/2$ calcula los valores reducidos de ϕ y de α .

- Error: si $\phi \geq \pi/2$ y el valor reducido de α es $\alpha = \pi/2$ satura los valores de las variables F y E (hace $F=E=888.888$) para indicar que no es válido.

- Complete: si $\phi \geq \pi/2$ es necesario calcular las integrales elípticas completas además de las incompletas relativas al argumento reducido, lo cual se efectúa calculando las primeras una vez calculadas las segundas.

- Composition: si $\phi \geq \pi/2$ compone el valor final de F y E a partir de los valores de F y E correspondientes a $\phi = \pi/2$ y $\phi = \phi$ reducido.

El listado del subprograma en lenguaje HP-Basic se presenta en la Tabla 2.

3.4. CALCULO DE LAS INTEGRALES ELIPTICAS MEDIANTE LA TRANSFORMACION DE LANDEN

Uno de los métodos que pueden emplearse para el cálculo de las integrales elípticas de primera y segunda especie es el basado en la transformación descendente de Lan-

Tabla 2. CALCULO DE LAS INTEGRALES ELIPTICAS DE PRIMERA Y SEGUNDA ESPECIE MEDIANTE DESARROLLO EN SERIES.

```

10      ! ***** ELL-SE *****
20      !
30      ! ELLIPTIC INTEGRALS BY SERIES
40      SUB Ell(Phi,Alpha,F,E)                                !INPUT IN DEGREES
50      Initializing: !
60      RAD
70      Phi=Phi*PI/180
80      Alpha=Alpha*PI/180
90      Q=INT(Phi/PI*2)
100     Sa=SIN(Alpha)
110     IF Q=0 THEN Series
120     Reducing: !
130     Q2=INT((Phi+PI/2)/PI)
140     Phi=ABS(Q2*PI-Phi)
150     Alpha=ABS(PI*INT((Alpha+PI/2)/PI)-Alpha)
160     N=1
170     IF Alpha=PI/2 THEN Error
180     Series: !
190     Si=SIN(Phi)
200     Ci=COS(Phi)
210     I=Phi
220     J=1
230     K=-1
240     F=E=Phi
250     FOR M=2 TO 1000 STEP 2
260     I=I*(1-1/M)-Ci/M*Si^(M-1)
270     J=J*(1-1/M)
280     K=K*(1-3/M)
290     Im=I*Sa^M
300     F=F+J*Im
310     E=E-K*Im
320     IF ABS(Im)<.0001 THEN 340
330     NEXT M
340     IF Q=0 THEN End
350     IF N=1 THEN Complete
360     Composition: !
370     F=2*Q2*F+(-1)^Q*F1
380     E=2*Q2*E+(-1)^Q*E1
390     GOTO End
400     Complete: !
410     F1=F
420     E1=E
430     Phi=PI/2
440     N=2
450     GOTO Series
460     Error: !
470     F=E=888888
480     End: !
490     SUBEND

```

den. Como se verá más adelante este método es el más idóneo, por lo que se explica con más detalle que los anteriores. Dicha transformación permite escribir una integral elíptica en función de otra de ángulo paramétrico menor. La aplicación sucesiva de la misma permite obtener integrales cuyo ángulo paramétrico será cada vez menor. Cuando éste sea lo suficientemente pequeño, las integrales podrán calcularse de acuerdo con una fórmula simplificada. Las expresiones que se obtienen para ambas integrales contienen términos que dependen de los ángulos paramétricos y de las amplitudes correspondientes. Estos términos pueden calcularse con la ayuda del proceso de la media aritmético-geométrica, como se describe más adelante. La integral de segunda especie aparece como una función de la de primera especie.

La transformación de Landen proporciona las siguientes relaciones:

$$(1 + \operatorname{sen} \alpha_n)(1 + \operatorname{cos} \alpha_{n-1}) = 2 \quad (14)$$

$$\operatorname{tg}(\phi_n - \phi_{n-1}) = \operatorname{cos} \alpha_{n-1} \operatorname{tg} \phi_{n-1} \quad (15)$$

donde α_n, α_{n-1} son ángulos paramétricos relacionados por la transformación y ϕ_n, ϕ_{n-1} son las amplitudes correspondientes, de manera que se cumplen las relaciones

$$\alpha_n < \alpha_{n-1}, \quad \phi_n > \phi_{n-1} \quad (16)$$

La sucesiva aplicación del proceso a partir de los valores $\alpha_0 = \alpha$ y $\phi_0 = \phi$ permite obtener un α_N lo suficientemente pequeño para que pueda aplicarse la fórmula

$$F(\phi_N, 0) = \phi \quad (17)$$

La aplicación reiterada de la transformación de Landen a las integrales elípticas proporciona las fórmulas que se escriben a continuación.

En el caso de la integral de primera especie, $F(\phi, \alpha)$, se deduce que

$$\begin{aligned} F(\phi, \alpha) &= (1 + \cos \alpha)^{-1} F(\phi_1, \alpha_1) = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{sen} \alpha_1) F(\phi_1, \alpha_1) = \\ &= 2^{-n} \prod_{s=1}^n (1 + \operatorname{sen} \alpha_s) F(\phi_n, \alpha_n) = \\ &= \Phi \prod_{s=1}^n (1 + \operatorname{sen} \alpha_s) \quad , \end{aligned} \quad (18)$$

donde Φ es

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} F(\phi_n, \alpha_n) \quad (19)$$

que, con ayuda de (17), puede escribirse:

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \phi_n \quad (20)$$

En el caso de la integral completa de primera especie se obtiene

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) = \frac{1}{2} \pi \prod_{s=1}^{\infty} (1 + \operatorname{sen} \alpha_s) \quad (21)$$

de donde se deduce que

$$F(\phi, \alpha) = \frac{2}{\pi} F\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) \Phi \quad . \quad (22)$$

El desarrollo que se obtiene en el caso de la integral de segunda especie es:

$$\begin{aligned} E(\phi, \alpha) &= F(\phi, \alpha) \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \alpha \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha_1 + \frac{1}{2^2} \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2 + \dots \right) \right] + \\ &+ \operatorname{sen} \alpha \left[\frac{1}{2} (\operatorname{sen} \alpha_1)^{1/2} \operatorname{sen} \phi_1 + \frac{1}{2^2} (\operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2)^{1/2} \operatorname{sen} \phi_2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (23)$$

y en el de la integral completa se obtiene:

$$E\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) = F\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) \left[1 - \frac{1}{2} \text{sen}^2 \alpha \left(1 + \frac{1}{2} \text{sen} \alpha_1 + \frac{1}{2} \text{sen} \alpha_1 \text{sen} \alpha_2 + \dots \right) \right] \quad (24)$$

Los términos que aparecen en las fórmulas anteriores pueden calcularse utilizando el proceso de la media aritmético-geométrica que se describe a continuación.

De la transformación de Landen (14) y (15) se deducen las expresiones:

$$\cos \alpha_n = \frac{2(\cos \alpha_{n-1})^{1/2}}{1 + \cos \alpha_{n-1}} \quad (25)$$

$$\text{sen} \alpha_n = \frac{1 - \cos \alpha_{n-1}}{1 + \cos \alpha_{n-1}}, \quad (26)$$

que sugieren el empleo para su cálculo de las cantidades a_n , b_n y c_n definidas como

$$a_n = \frac{1}{2} (a_{n-1} + b_{n-1}) \quad (27)$$

$$b_n = (a_{n-1} \cdot b_{n-1})^{1/2} \quad (28)$$

$$c_n = \frac{1}{2} (a_{n-1} - b_{n-1}), \quad (29)$$

siendo

$$\cos \alpha_n = \frac{b_n}{a_n} \quad (30)$$

$$\text{sen} \alpha_n = \frac{c_n}{a_n}. \quad (31)$$

Los valores iniciales de a_n , b_n y c_n serán:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = \cos \alpha, \quad c_0 = \text{sen} \alpha \quad (32)$$

y los valores n -ésimos deducidos de dichos valores iniciales, que son muy útiles para el cálculo de las integrales elípticas, son:

$$a_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 + \operatorname{sen} \alpha_i)} \quad (33)$$

$$b_n = \frac{\cos \alpha_n}{\prod_{i=1}^n (1 + \operatorname{sen} \alpha_i)} \quad (34)$$

$$c_n = \frac{\operatorname{sen} \alpha_n}{\prod_{i=1}^n (1 + \operatorname{sen} \alpha_i)} = \frac{1}{2^n} \operatorname{sen} \alpha_n \prod_{i=1}^n (\operatorname{sen} \alpha_i)^{1/2} \quad (35)$$

Además, como $\alpha_n \rightarrow 0$, $a_n - b_n \rightarrow 0$ y $c_n \rightarrow 0$, el proceso iterativo puede detenerse en el paso N-ésimo cuando $a_N = b_N$, es decir, $c_N = 0$ con la precisión con que se necesiten obtener los resultados.

Ahora las expresiones (21) y (24) pueden escribirse:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) = \frac{\pi}{2a_N} \quad (36)$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) = F\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) \left[1 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N 2^n c_n^2 \right] \quad (37)$$

$$F(\phi, \alpha) = \frac{\phi_N}{2^N a_N} \quad (38)$$

$$E(\phi, \alpha) = \frac{E\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right)}{F\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right)} F(\phi, \alpha) + \sum_{n=1}^N c_n \operatorname{sen} \phi_n \quad (39)$$

A la vista de las fórmulas anteriores, parece conveniente introducir para la simplificación del cálculo dos nuevas cantidades, d_n y g_n , función de las anteriores, definidas como

$$d_n = d_{n-1} + 2^n c_n \quad (40)$$

$$g_n = g_{n-1} + c_n \operatorname{sen} \phi_n \quad (41)$$

con los valores iniciales siguientes:

$$d_o = c_o^2, \quad g_o = 0. \quad (42)$$

Así, las expresiones de las integrales elípticas que se utilizan para el cálculo pueden escribirse de la siguiente forma:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) = \frac{\pi}{2a_N} \quad (43)$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) = F\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right)\left(1 - \frac{d_N}{2}\right) \quad (44)$$

$$F(\phi, \alpha) = \frac{\phi_N}{2^N a_N} \quad (45)$$

$$E(\phi, \alpha) = \left(1 - \frac{\phi_N}{2}\right)F(\phi, \alpha) + g_N, \quad (46)$$

donde a_N , d_N , g_N , se calculan conforme se ha apuntado y ϕ_N se determina como indica la expresión (15), que ahora puede escribirse:

$$\operatorname{tg}(\phi_n - \phi_{n-1}) = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \operatorname{tg}\phi_{n-1} \quad (47)$$

Despejando ϕ_n en esta ecuación, se obtiene:

$$\phi_n = \phi_{n-1} + \operatorname{arctg}\left(\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \operatorname{tg}\phi_{n-1}\right) + \pi I\left(\frac{\phi_{n-1}}{\pi}\right) + \pi I\left(\frac{\phi_{n-1} - \pi I\left(\frac{\phi_{n-1}}{\pi}\right)}{\pi/2}\right) \quad (48)$$

donde $I(x)$ representa la parte entera de x . Los dos últimos términos del segundo miembro de (48) es necesario añadirlos para poder calcular el valor total del ángulo, ya que el valor que el ordenador calcula es el valor principal de la función arcotangente, definida en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, y el ángulo ϕ_n toma valores crecientes pudiendo salirse de dicho intervalo.

Un programa de cálculo elaborado de acuerdo con las fórmulas anteriores, permitiría calcular los valores de las integrales elípticas, completas e incompletas de primera y segunda especie para cualquier valor de sus argumentos α, ϕ comprendidos entre 0 y $\pi/2$, a excepción de un entorno muy reducido (de radio 10^{-11}) de este último valor, dentro del cual se presentan problemas de convergencia en el cálculo. Esta limitación podría eliminarse transformando las integrales comprendidas dentro de ese entorno a otro cerca del origen, pero debido a que no es probable que se presente este problema en el curso de su utilización y dado el reducido intervalo de invalidez, se ha eliminado el problema sustituyendo a efectos de cálculo los valores comprendidos en ese entorno por un valor único (α ó ϕ igual a $\frac{\pi}{2} - 10^{-11}$).

Como en los casos anteriores, para que los datos de entrada del mismo, α y ϕ , puedan ser cualquier valor, hay que transformar esos valores en los correspondientes comprendidos entre 0 y $\pi/2$. En el caso de la amplitud, ϕ , esto se realiza teniendo en cuenta que

$$F(\phi \pm \pi Q_2, \alpha) = 2Q_2 F(\frac{\pi}{2}, \alpha) \pm F(\phi, \alpha) \quad (49)$$

$$E(\phi \pm \pi Q_2, \alpha) = 2Q_2 E(\frac{\pi}{2}, \alpha) \pm E(\phi, \alpha) \quad (50)$$

Como cualquier ϕ puede escribirse como

$$\phi = \phi_r \pm \pi Q_2 \quad , \quad (51)$$

donde ϕ_r representa la amplitud reducida comprendida entre 0 y $\pi/2$ y el signo y Q_2 pueden calcularse de acuerdo con las expresiones:

$$Q = I\left(\frac{\phi}{\pi/2}\right) \quad (52)$$

$$Q_2 = I\left(\frac{\phi + \pi/2}{\pi}\right) , \quad (53)$$

donde el signo viene dado por $(-1)^{Q_2}$.

Ahora la amplitud reducida ϕ_r puede escribirse

$$\phi_r = |Q_2 \pi - \phi| , \quad (54)$$

donde $|x|$ indica el valor absoluto de x .

Los valores de las integrales elípticas, $F(\phi, \alpha)$ y $E(\phi, \alpha)$, para cualquier valor de sus argumentos se calculan mediante las expresiones:

$$F(\phi, \alpha) = 2Q_2 F\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) \pm F(\phi_r, \alpha) \quad (55)$$

$$E(\phi, \alpha) = 2Q_2 E\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) \pm E(\phi_r, \alpha) , \quad (56)$$

donde el signo del segundo término, Q_2 y ϕ_r se evalúan con ayuda de las expresiones anteriores.

En el caso del ángulo paramétrico, α , como la expresión que interviene en las integrales es $\text{sen}^2 \alpha$, hay que calcular el ángulo reducido, α_r , comprendido entre 0 y 90° tal que

$$\text{sen}^2 \alpha_r = \text{sen}^2 \alpha , \quad (57)$$

lo que puede obtenerse, de una forma análoga a como se ha hecho con ϕ , mediante la expresión

$$\alpha_r = \left| \alpha - \pi I\left(\frac{\alpha + \pi/2}{\pi}\right) \right| . \quad (58)$$

En la Fig. 4 se presenta el organigrama de la subrutina diseñada de acuerdo con las fórmulas detalladas anteriormente. Los bloques que componen el programa son los siguientes:

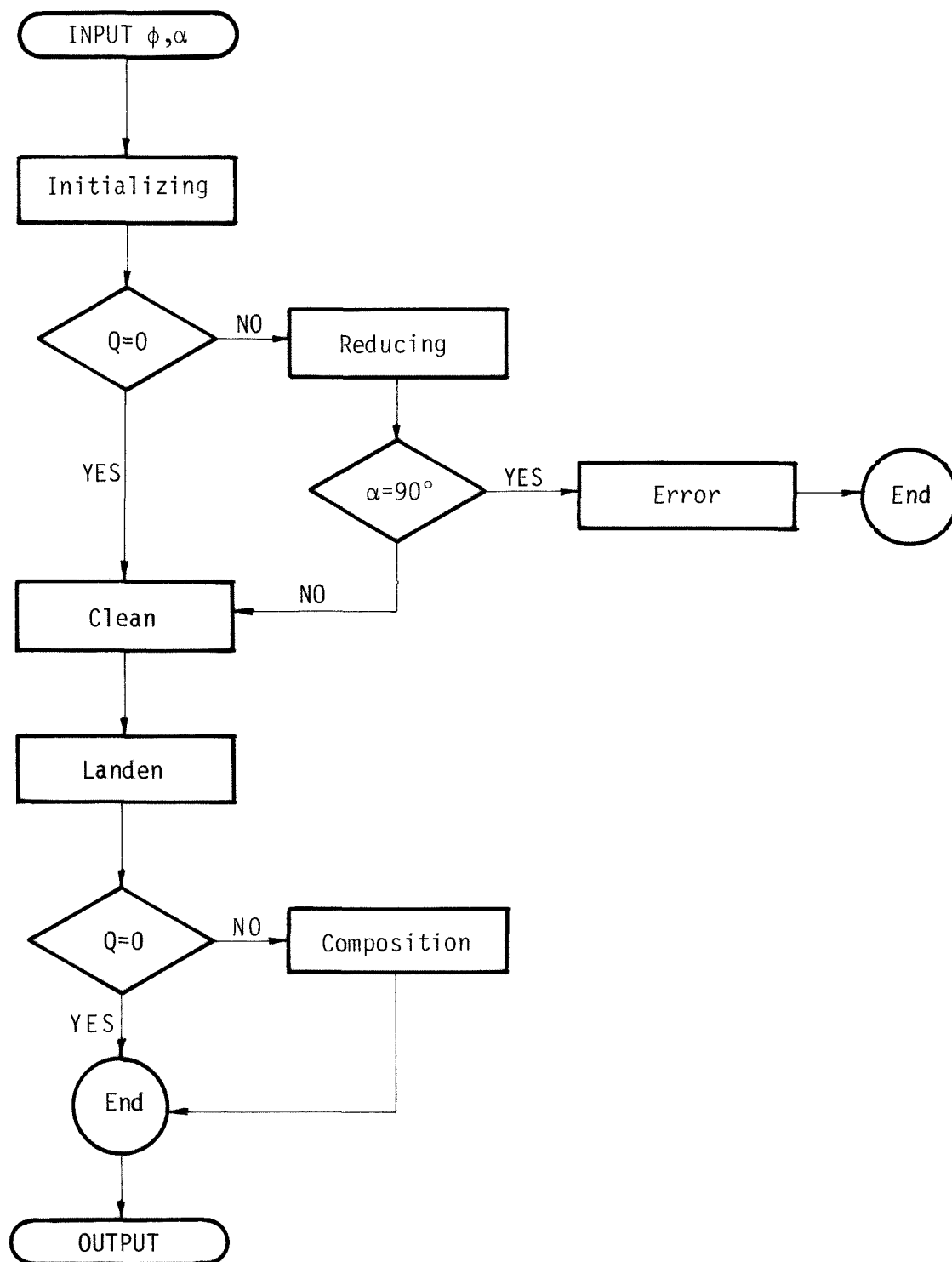


Fig. 4. Organigrama de cálculo de las integrales elípticas de primera y segunda especie mediante la transformación de Landen.

- Initializing: cambia la entrada de grados a radianes, calcula el cuadrante de círculo en que está ϕ y el valor reducido de α , α_r .

- Clean: elimina el problema que se presenta en el entorno de 90° .

- Landen: calcula las integrales elípticas, de primera y segunda especie, completas e incompletas.

- Reducing: si $\phi \geq \pi/2$ calcula el valor reducido de ϕ .

- Error: si $\phi \geq \pi/2$ y el valor reducido de α es $\alpha = \pi/2$ satura los contadores de F y E (hace $F=E=888.888$) para indicar que no es válido.

- Composition: si $\phi \geq \pi/2$ compone el valor final de F y E a partir de los valores de F y E correspondientes a $\phi = \pi/2$ y $\phi = \phi$ reducido.

El listado del subprograma en lenguaje HP-Basic se presenta en la Tabla 3.

Para una mejor comprensión del programa, en la Tabla 4 se especifican y explican las variables utilizadas en el mismo. De entre ellas cabe destacar las que forman parte de la lista de parámetros formales, a través de las cuales se realiza la comunicación con el programa principal, es decir, entran los datos utilizados por el programa (ϕ y α) y se ponen los resultados ($F(\phi, \alpha), E(\phi, \alpha)$) a disposición del programa principal.

Tabla 3. CALCULO DE LAS INTEGRALES ELIPTICAS DE PRIMERA Y SEGUNDA ESPECIE MEDIANTE LA TRANSFORMACION DE LANDEN.

```

10      ! ***** ELL-LD *****
20      !
30      ! ELLIPTIC INTEGRALS BY LANDEN TRANSFORMATION
40      SUB Ell(Phi,Alpha,F,E)                                ! INPUT IN DEGREES
50      Initializing: !
60      RAD
70      Alpha=Alpha*PI/180
80      Phi=Phi*PI/180
90      Q=INT(Phi/PI*2)
100     Alpha=ABS(PI*INT((Alpha+PI/2)/PI)-Alpha)
110     IF Q=0 THEN Clean
120     Reducing: !
130     Q2=INT((Phi+PI/2)/PI)
140     Phi=ABS(Q2*PI-Phi)
150     IF Alpha=PI/2 THEN Error
160     Clean: !
170     IF PI/2-Phi>1E-11 THEN 190
180     Phi=PI/2-1E-11
190     IF PI/2-Alpha>1E-11 THEN 210
200     Alpha=PI/2-1E-11
210     Landen: !
220     A=1
230     B=COS(Alpha)
240     C=SIN(Alpha)
250     D=C^2
260     G=0
270     FOR I=1 TO 30
280     A0=A
290     B0=B
300     A=(A0+B0)/2
310     B=SQR(A0*B0)
320     C=(A0-B0)/2
330     D=D+C*C*2^I
340     P2=PI*INT(Phi/PI)
350     P2=P2+PI*INT((Phi-P2)/PI*2)
360     Phi=Phi+P2+ATN(B0/A0*TAN(Phi))
370     G=G+C*SIN(Phi)
380     IF C<1E-4 THEN 400
390     NEXT I
400     F90=PI/A/2
410     E90=F90*(1-D/2)
420     F=Phi/A/2^I
430     E=(1-D/2)*F+G
440     IF Q=0 THEN End
450     Composition: !
460     F=2*Q2*F90+(-1)^Q*F
470     E=2*Q2*E90+(-1)^Q*E
480     GOTO End
490     Error: !
500     F=E=888888
510     End: !
520     SUBEND

```

Tabla 4. LISTA DE VARIABLES EN EL SUBPROGRAMA ELL-LD

Variable	Significado		Situación (2)	Función (3)
	Fuera bucle	Dentro bucle		
Alpha	$\alpha, \alpha_r, \alpha_o$		1 2	1
Phi	$\phi, \phi_r, \phi_o, \phi_N$	ϕ_{n-1}, ϕ_n	1 2 3 4	1
PI	π	π	1 2 3 4	2
Q			1 6	2
Q ₂			4 6	2
A	a_o, a_N	a_n	3	2
B	b_o	b_n	3	2
C	c_o	c_n	3	2
D	d_o, d_N	d_n, d_{n-1}	3	2
G	g_o, g_N	g_n, g_{n-1}	3	2
A0		a_{n-1}	3	2
B0		b_{n-1}	3	2
P2		(1)	3	2
I	N	n	3	2
F90	$F(\pi/2, \alpha)$		3 6	3
E90	$E(\pi/2, \alpha)$		3 6	3
F	$F(\phi, \alpha)$		3 5 6	3
E	$E(\phi, \alpha)$		3 5 6	3

- (1) P2 es una variable auxiliar empleada para el cálculo de ϕ_n .
- (2) 1, Initializing; 2, Clean; 3, Landen; 4, Reducing; 5, Error; 6, Composition.
- (3) 1, Dato de entrada; 2, Variable interna; 3, resultado.

3.5. COMPARACION DE LOS DIVERSOS SUBPROGRAMAS DE CALCULO DE LAS INTEGRALES ELIPTICAS.

Para la comparación de los programas anteriores se han empleado los siguientes criterios: 1º) rapidez de cálculo en función de la precisión de los resultados obtenidos, y 2º) como un factor de menor importancia, la memoria ocupada.

Dichos programas han sido elaborados porque los existentes en el SSP (Scientific Subroutine Package) no se adaptaban de una manera satisfactoria a las necesidades del proceso de simulación.

Además de haber sido ensayados con el mismo ordenador (HP-45B) se ha cuidado de que las condiciones de funcionamiento hayan sido idénticas: mismos datos y precisiones, suprimiéndose al máximo las posibles redundancias.

Las subrutinas elaboradas corresponden a tres métodos muy diferentes entre sí:

- 1) Método de Simpson.
- 2) Desarrollo en serie.
- 3) Transformación de Landen con el proceso de la media aritmético-geométrica.

Uno de los inconvenientes del primer método es el de tener que evaluar el valor de la función integrando en el interior del bucle de cálculo. Esto no sería grave si el número de pasos (de rectángulos) no se volviese demasiado grande cuando α está próximo a $\pi/2$.

El segundo método presenta una ventaja a tener en cuenta: los valores de $\sin\phi$ y $\cos\phi$ evalúan una sola vez en la parte inicial del segmento de cálculo y no dentro del bu-

cle. Esto sería un argumento en favor de la elección de este método si no estuviese afectada su convergencia cuando α se aproxima a $\pi/2$, lo que presenta un problema a la hora de calcular las integrales completas.

La transformación de Landen y la rápida convergencia del proceso de la media aritmético-geométrica hacen del tercer método el más expeditivo entre los que se acaban de estudiar. Aunque el bucle contenga la evaluación de tres funciones circulares, el número de iteraciones a realizar para alcanzar una precisión dada es muy pequeño (dos o tres iteraciones) y varía poco con α .

Por otra parte no existen diferencias notables entre ellas en cuanto a la cantidad de memoria ocupada.

La velocidad de cálculo depende de la precisión con la que se deseen obtener los resultados, ya que al aumentar ésta también lo hace el número de iteraciones necesarias. El método empleado para evaluar la velocidad de cálculo ha sido medir el tiempo medio empleado por las subrutinas para elaborar una tabla de integrales elípticas de primera y segunda especie correspondiente a los argumentos 0° , 10° , 20° , 30° , 40° , 50° , 60° , 70° , 80° y 90° , excepto el caso singular $\phi=\alpha=90^\circ$. La Tabla 5 es un resumen de los resultados.

Tabla 5.- TIEMPO MEDIO DE CALCULO DE LAS INTEGRALES ELIPTICAS

t(seg)	Regla de Simpson	Desarrollo en series	Transformación de Landen
$F(\phi, \alpha)$.43	.32	.26
$E(\phi, \alpha)$.30	.30	.26

REFERENCIAS

1. Abramowitz, M. & Stegun, I., "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications, Inc., New York, 1965, p. 589.
2. Milne-Thomson, L.M., "Teoría Unificada de las Funciones Elípticas Jacobianas", I.N.T.A., 1952, p. 73.